



**Technische Universität Ilmenau**  
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften  
FG Diskrete Mathematik und Algebra

## **Über untere Schranken zur Unabhängigkeit in Graphen**

Masterarbeit zur Erlangung des akademischen Grades Master of Science

**Samuel Mohr**

Verantwortlicher Hochschullehrer:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dr. h. c. Jochen Harant,  
FG Diskrete Mathematik und Algebra

Die Masterarbeit wurde am 18. November 2016 bei der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften der Technischen Universität Ilmenau eingereicht.

# Zusammenfassungen

## Abstract

Let  $G = (V, E)$  be a simple, finite, undirected graph with vertex set  $V(G)$  and edge set  $E(G)$ . An independent set of  $G$  is a subset  $I$  of vertices with no two of its members adjacent in  $G$ ; a well-studied combinatorial optimization problem is to find an independent set of maximal cardinality. Due to the computational complexity of the depending decision problem it is justified to deal with bounds on the independence number, primarily with lower bounds.

This Master's Thesis introduces a new lower bound that can be seen as an improvement of the classical lower bound on the independence number proofed independently by Caro and Wei. Especially, deductions of the result are of interest, because they lead to simple and efficiently computable bounds. Apart from comparisons with other classical lower bounds of O. Murphy und S. M. Selkow, the result is used to deduce a bound that comes close to a conjecture of E. Bertram und P. Horak.

## Zusammenfassung

Gegeben sei ein einfacher, endlicher, ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  mit Eckenmenge  $V(G)$  und Kantenmenge  $E(G)$ . Eine unabhängige Menge in  $G$  ist eine Teilmenge der Eckenmenge  $V(G)$ , in der je zwei Ecken nicht adjazent in  $G$  sind. Ein oft untersuchtes kombinatorisches Optimierungsproblem ist die Frage nach einer unabhängigen Menge maximaler Kardinalität. Aufgrund der schweren Berechenbarkeit des dazugehörigen Entscheidungsproblems ist es gerechtfertigt, sich mit Schranken, überwiegend unteren Schranken, zu beschäftigen.

Der Beitrag dieser Masterarbeit ist eine neue untere Schranke, die als Verbesserung der bekannten Caro-Wei-Schranke aufgefasst werden kann. Hierbei sind insbesondere Spezialisierungen von Interesse, die zu einfachen und leicht berechenbaren Schranken führen. Neben Vergleichen mit klassischen unteren Schranken von O. Murphy und S. M. Selkow wird das Resultat genutzt, um eine Schranke zu entwickeln, die einer Vermutung von E. Bertram und P. Horak nahe kommt.

# Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle besonders bei Herrn Prof. Dr. Jochen Harant für die hervorragende Betreuung dieser Masterarbeit bedanken. Die vielen lehrreichen und fruchtbaren Diskussionen waren mir immer ein Vergnügen.

Großer Dank gilt Stefan Walzer für seine Einführung in die Thematik der derandomisierten Algorithmen.

Bei meinen Eltern möchte ich mich für die immerwährende Unterstützung und Ermutigung während meines kompletten Studiums bedanken.

Außerdem möchte ich mich bei Dario Dennstädt und Jonis Alkewitz bedanken, die durch das Korrekturlesen früherer Versionen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Übersicht zu Caro-Wei-ähnlichen Schranken . . . . .	1
1.2	Die Jensen'sche Ungleichung . . . . .	5
1.3	Notation und Struktur der Arbeit . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Eine neue untere Schranke für die Unabhängigkeitszahl</b>	<b>8</b>
2.1	Formulierung des Resultats . . . . .	8
2.2	Beispiele . . . . .	10
2.2.1	Stern . . . . .	10
2.2.2	Kreis . . . . .	12
2.3	Spezialisierungen des Resultats aus Abschnitt 2.1 . . . . .	17
2.3.1	Einschränkung auf Wege . . . . .	20
2.3.2	Einschränkung auf zweite Nachbarschaft . . . . .	21
2.4	Bemerkungen zu dem Resultat . . . . .	22
2.4.1	Kurze Hinweise zur NP-Problematik . . . . .	22
2.4.2	Vergleiche mit anderen Schranken . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Beweise</b>	<b>28</b>
3.1	Beweis des Resultats aus Kapitel 2 . . . . .	28
3.2	Algorithmen . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Über die Schranke von S. M. Selkow</b>	<b>36</b>
4.1	Die Schranke . . . . .	36
4.2	Bemerkungen zu einem möglichen Beweis der Schranke . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Variationen des Resultats aus Kapitel 2</b>	<b>44</b>
5.1	Ein anderer Weg zur Eindeutigkeit . . . . .	44
5.2	Alternative zur $(v, \phi)$ -Zulässigkeit . . . . .	46
5.3	Vollständige $v$ -Graphen . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Über die Vermutung von E. Bertram und P. Horak</b>	<b>51</b>
6.1	Der Nicht-Kanten-Graph . . . . .	51
6.2	Lokal $k$ -semireguläre Graphen . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>57</b>

# 1 Einführung

Das graphentheoretische *Unabhängigkeitsproblem* ist eines der bekanntesten und am meist untersuchten Probleme der kombinatorischen Optimierung. Hierzu gehen wir von einem einfachen, endlichen und ungerichteten Graph  $G = (V, E)$  mit *Eckenmenge*  $V = V(G)$  und *Kantenmenge*  $E = E(G)$  aus.

Eine Teilmenge  $I \subseteq V(G)$  der Eckenmenge nennen wir *unabhängig*, wenn je zwei Ecken aus  $I$  nicht adjazent, das heißt nicht benachbart, sind. Die maximale Mächtigkeit einer solchen Menge bezeichnen wir mit der *Unabhängigkeitszahl*  $\alpha(G)$ . Als einer der fundamentalen Parameter der Graphentheorie wurde die Unabhängigkeitszahl im Laufe der letzten Jahrzehnte häufig untersucht und ist Teil vieler wichtiger Anwendungen [BW06; BAT11].

Wir betrachten das zu  $\alpha(G)$  gehörige Entscheidungsproblem MAXIMUM INDEPENDENT SET [GJ79], welches besagt, dass zu gegebenem Graphen  $G$  und natürlicher Zahl  $k$  entschieden werden soll, ob es in  $G$  eine unabhängige Menge mit mindestens der Größe  $k$  gibt. Dies war eines der ersten bekannten NP-vollständigen Probleme [Kar72]; was bedeutet, dass es keine effizienten exakten Lösungsverfahren für dieses Problem unter der Voraussetzung  $P \neq NP$  geben kann. Zusätzlich ist hier keine Ausführungsgarantie gegeben [EH00; Has96]; das heißt es gibt keinen Algorithmus, der zu beliebigem Graphen eine unabhängige Menge der Größe  $c \cdot \alpha(G)$  für gegebenes  $c > 0$  in polynomialer Zeit unter der Voraussetzung  $P \neq NP$  findet. Für weiterführende Aspekte der NP-Problematik sei auf das Grundlagenwerk von M. R. Garey und D. S. Johnson [GJ79] verwiesen.

In Anbetracht dieser „schweren Berechenbarkeit“ ist es gerechtfertigt sich mit Schranken, überwiegend unteren Schranken, zu beschäftigen. Viele bekannte Resultate dieser Art lassen sich in entsprechender Literatur finden; es sei besonders auf die große Sammlung durch C. Larson und P. Gaskill [LG] verwiesen. In dieser Masterarbeit soll zunächst eine Schranke hergeleitet werden, in die als Information die gesamte Struktur des Graphen eingeht. Die Berechnung einer solchen Schranke wird entsprechend „langwierig“ sein, das heißt im Allgemeinen nicht in polynomialer Zeit durchführbar, woraus sich sofort die Frage ergibt, ob man ihre Berechnung nicht durch die exakte Bestimmung von  $\alpha(G)$  und der maximum unabhängigen Menge von  $G$  ersetzt. Diese Schranke wird aber der Ausgangspunkt zur Entwicklung einfacher, effizient berechenbarer Schranken und weiterer Resultate sein.

## 1.1 Übersicht zu Caro-Wei-ähnlichen Schranken

Es gibt diverse untere Schranken für die Unabhängigkeitszahl, die sich mit verschiedensten Informationen über den Graphen ermitteln lassen. In dieser Arbeit betrachten wir jedoch nur solche, die sich aus der Nachbarschaftsstruktur des Graphen berechnen lassen. Im Folgenden werden einige bekannte untere Schranken aufgelistet; hierbei wird versucht, diese anhand der zu ihrer Berechnung benötigten Informationen intuitiv einzuteilen.

Es sei lediglich erwähnt, dass es eine Vielzahl anderer unterer Schranken für  $\alpha(G)$  gibt. Beispielsweise lassen sich mit der Färbungszahl  $\chi(G)$  eines Graphen  $G$  und der leicht zu sehenden Abschätzung  $\alpha(G) \geq |V(G)|/\chi(G)$  einige Schranken herleiten. Ein bekanntes Resultat besagt, dass  $\chi(G) \leq \Delta(G)$  mit  $\Delta(G)$  dem Maximalgrad von  $G$  ist und damit  $\alpha(G) \geq |V(G)|/\Delta(G)$  für Graphen gilt, die weder vollständig noch ein Kreis sind [Bro41], oder auch dass die Abschätzung  $\alpha(G) \geq |V(G)|/\lambda_{\max}(G)$  gilt [Wil67], wobei  $\lambda_{\max}(G)$  den größten Eigenwert der zu  $G$  gehörenden Adjazenzmatrix bezeichnet.

An dieser Stelle seien zuerst kurz einige Begriffe erklärt. Zu einer Ecke  $v \in V(G)$  ist die Nachbarschaft  $N_G(v)$  die Menge aller Ecken  $u \in V(G)$  mit  $uv \in E(G)$ . Die Anzahl der Nachbarn ist der Grad  $d_G(v) := |N_G(v)|$ , der kleinste Wert ist der Minimalgrad  $\delta(G) := \min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$ . Mit  $N_G[v] := N_G(v) \cup \{v\}$  bezeichnen wir die abgeschlossene Nachbarschaft und zu einer Teilmenge  $C \subseteq V(G)$  ist der durch die Ecken aus  $C$  induzierte Untergraph  $H := G[C]$  der Graph mit Eckenmenge  $V(H) = C$  und Kantenmenge  $E(H) = \{uv \mid u, v \in C, uv \in E(G)\}$ . Eine Clique ist ein vollständiger Untergraph.

Unter den Ersten, die sich ausgiebig mit der Unabhängigkeitszahl beschäftigten, waren es Y. Caro [Car79] und V. K. Wei [Wei81], die unabhängig voneinander die klassische, heute als *Caro-Wei-Schranke* bekannte, untere Schranke für die Unabhängigkeitszahl entwickelten, die sich nur aus den Graden  $d_G(v)$  der Ecken  $v \in V(G)$  berechnen lässt.

**Proposition 1.1.1 (Y. Caro, V. K. Wei)**

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann gilt

$$\alpha(G) \geq CW(G), \tag{1.1}$$

wobei  $CW(G)$  die Caro-Wei-Schranke bezeichnet,

$$CW(G) := \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d_G(v) + 1}.$$

Ist  $G = K_n$  der vollständige Graph mit  $n$  Ecken, so ist die Caro-Wei-Schranke scharf. Gleiches gilt für einen Graphen bestehend aus unabhängigen Cliquen. Wir zeigen hier kurz, dass auch die Umkehrung gilt. Sei  $G = (V, E)$  ein beliebiger zusammenhängender Graph, für den in (1.1) Gleichheit gilt. Es sei  $v \in V(G)$  eine Ecke mit minimalem Grad, das heißt  $d_G(v) = \delta(G)$ , und sei  $H = G[V(G) \setminus N_G[v]]$  der induzierte Untergraph ohne die abgeschlossene Nachbarschaft  $N_G[v]$  von  $v$ .

Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha(G) &\geq \alpha(H) + 1 \geq CW(H) + 1 \\ &= \sum_{u \in V(H)} \frac{1}{d_H(u) + 1} + \sum_{w \in N_G[v]} \frac{1}{\delta(G) + 1} \\ &\geq \sum_{u \in V(H)} \frac{1}{d_G(u) + 1} + \sum_{w \in N_G[v]} \frac{1}{d_G(w) + 1} \\ &= CW(G) = \alpha(G). \end{aligned}$$

Somit gilt in dieser Ungleichungskette überall Gleichheit und folglich ist  $d_H(u) = d_G(u)$  für alle  $u \in V(H)$ . Die Ecken von  $N_G[v]$  sind nicht mit den Ecken in  $H$  adjazent, sie bilden also eine Komponente von  $G$ ; wegen des Zusammenhangs von  $G$  ist  $H = \emptyset$  der leere Graph. Da außerdem  $d_G(w) = \delta(G)$  für alle  $w \in N_G[v]$  gilt, ist  $G = K_{\delta(G)+1}$  ein vollständiger Graph mit  $\delta(G) + 1$  Ecken gewesen und die Umkehrung gezeigt.

Die Caro-Wei-Schranke  $CW(G)$  ist folglich genau dann scharf, wenn  $G$  ein Graph bestehend aus unabhängigen Cliques ist. In allen anderen Fällen ist die Schranke nicht scharf und kann somit verbessert werden. Im Folgenden werden einige Verbesserungen der Caro-Wei-Schranke aufgelistet; für deren Beweise sei auf die entsprechenden Literaturstellen verwiesen. In Kapitel 2 wird eine neue Schranke vorgestellt; auch diese kann als eine Verbesserung der Caro-Wei-Schranke aufgefasst werden.

Eine der ersten Verbesserung von  $CW(G)$  zeigte O. Murphy [Mur91] im Jahr 1991.

**Proposition 1.1.2 (O. Murphy)**

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph. Dann gilt

$$\alpha(G) \geq CW(G) + \frac{CW(G) - 1}{\Delta(\Delta + 1)}. \quad (1.2)$$

Hierbei bezeichnet  $\Delta = \Delta(G)$  den Maximalgrad von  $G$ .

Die beiden erwähnten Schranken (Proposition 1.1.1 und 1.1.2) beziehen ihre Informationen zu jeder Ecke  $v \in V(G)$  nur aus dem Grad  $d_G(v)$ . Schranken, die sich nur aus den Graden der Ecken berechnen lassen, teilen wir in eine *erste Kategorie* ein. Mit  $\omega_G(v)$  sei die Anzahl der Ecken der größten Clique bezeichnet, die  $v$  enthält. Lässt man neben  $d_G(v)$  auch  $\omega_G(v)$  als einen zu betrachtenden Eckenparameter zu, so zählt auch die folgende Vermutung von E. Bertram und P. Horak [BH96] in die erste Kategorie.

**Vermutung 1.1.3 (E. Bertram, P. Horak)**

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann gilt

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{2}{d_G(v) + \omega_G(v) + 1}.$$

Diese Vermutung wurde von C. Brause, B. Randerath, D. Rautenbach und I. Schiermeyer für perfekte Graphen und Graphen mit Maximalgrad 4 bewiesen [Bra+15], im Allgemeinen ist sie jedoch offen. In Kapitel 6 werden wir auf diese Vermutung genauer eingehen.

Nehmen wir in unsere Schranken neben  $d_G(v) = |N_G(v)|$  als weitere Information auch noch die Menge  $N_G(v)$  selbst hinzu, erhalten wir eine *zweite Kategorie*. Als *dritte und letzte Kategorie* seien alle Schranken bezeichnet, die darüber hinaus noch weitere Eigenschaften des Graphen verwenden. Ein Beispiel einer Schranke der zweiten Kategorie ist die folgende von S. M. Selkow aus dem Jahr 1994 [Sel94].

**Proposition 1.1.4 (S. M. Selkow)**

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann gilt

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \left( \frac{1}{d_G(v) + 1} \left( 1 + \max \left\{ \frac{d_G(v)}{d_G(v) + 1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1}, 0 \right\} \right) \right). \quad (1.3)$$

Diese Schranke werden wir in Kapitel 4 genauer untersuchen.

Die folgende Schranke von E. Angel, R. Campigotto und C. Laforest [ACL13] ist ein Beispiel für die dritte Kategorie. Zu ihrer Berechnung werden die gemeinsamen Nachbarschaften der Ecken hinzugenommen. Von einer Ecke  $v \in V(G)$  ausgehend betrachten wir neben der Menge  $N_G(v)$  außerdem auch die Nachbarschaft  $N_G(w)$  der Nachbarecken  $w \in N_G(v)$ , das heißt Ecken mit Abstand 2 zur Ecke  $v$ .

**Proposition 1.1.5 (E. Angel, R. Campigotto, C. Laforest)**

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender und nicht vollständiger Graph. Dann gilt

$$\alpha(G) \geq CW(G) + \frac{\nu}{CW(G) - 1},$$

wobei

$$\begin{aligned} \nu := & \sum_{v \in V(G)} \frac{d_G(v)}{(d_G(v) + 1)^2} - 2 \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{(d_G(u) + 1)(d_G(v) + 1)} \\ & + 2 \sum_{uv \notin E(G)} \frac{d(u, v)}{(d_G(u) + 1)(d_G(v) + 1)(2 + d_G(u) + d_G(v) - d(u, v))} \end{aligned}$$

und  $d(u, v) := |N_G(u) \cap N_G(v)|$  die Anzahl gemeinsamer Nachbarn ist.

Oft ist es von Interesse, untere Schranken für die Unabhängigkeitszahl zu entwickeln, die wenige und fundamentale Parameter der Graphen wie seine Eckenzahl  $n := |V(G)|$  und Kantenzahl  $m := |E(G)|$  beinhalten. Die Jensen'sche Ungleichung bietet solch eine Möglichkeit, die Schranken aus Abschnitt 1.1 in jene dieser Art weiterzuentwickeln.



## 1.2 Die Jensen'sche Ungleichung

Wir formulieren die Jensen'sche Ungleichung für konvexe Funktionen.

### Lemma 1.2.1 (Jensen'sche Ungleichung)

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige konvexe Funktion auf  $D$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_i \in D$ ,  $\lambda_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $\sum_i \lambda_i = 1$ .

Dann gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i). \quad (\text{J})$$

Wenden wir die Jensen'sche Ungleichung auf die Caro-Wei-Schranke mit der konvexen Funktion  $x \mapsto \frac{1}{x+1}$  an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha(G) \geq CW(G) &= \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d_G(v) + 1} = n \cdot \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n} \frac{1}{d_G(v) + 1} \\ &\stackrel{(\text{J})}{\geq} n \cdot \frac{1}{\left(\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n} d_G(v)\right) + 1} = \frac{n}{d(G) + 1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Hierbei ist  $n := |V(G)|$  die Ordnung des Graphen und

$$d(G) := \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \frac{2|E(G)|}{n}$$

der Durchschnittsgrad von  $G$ . Dies kann bereits in [Wei81] gefunden werden.

Eine andere Schranke erhält man mit der Jensen'schen Ungleichung angewendet auf ein Resultat von J. Harant und D. Rautenbach [HR11].

### Lemma 1.2.2

Für einen Graphen  $G = (V, E)$  mit  $\kappa$  Komponenten existiert eine positive Zahl  $k \in \mathbb{N}$  und eine Funktion  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit nicht-negativen ganzzahligen Werten, die  $f \leq d_G$  erfüllt.

Es gilt

$$\alpha(G) \geq k \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d_G(v) + 1 - f(v)}$$

und

$$\sum_{v \in V(G)} f(v) \geq 2(k - \kappa).$$

Der Wert  $k$  ist im Allgemeinen nicht bekannt, mit der Jensen'schen Ungleichung lässt sich allerdings eine quadratische Gleichung für  $k$  und damit eine Schranke für  $\alpha(G)$  ermitteln. Für

einen zusammenhängenden Graph  $G$  mit  $n$  Ecken und der konvexen Funktion  $x \mapsto \frac{1}{x}$  gilt

$$\frac{k}{n} \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n} \frac{1}{d_G(v) + 1 - f(v)} \stackrel{(J)}{\geq} \frac{1}{\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n} (d_G(v) + 1 - f(v))} \geq \frac{1}{d(G) + 1 - \frac{2(k-1)}{n}}.$$

Umgestellt nach  $k$ ,

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(d(G) + 1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{k}{n} + \frac{1}{2} \leq 0,$$

ergibt sich aus der quadratischen Ungleichung:

$$\frac{k}{n} \geq \frac{\frac{1}{2} \left(d(G) + 1 + \frac{2}{n}\right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(d(G) + 1 + \frac{2}{n}\right)^2 - 2}}{2} = \frac{2}{\left(d(G) + 1 + \frac{2}{n}\right) + \sqrt{\left(d(G) + 1 + \frac{2}{n}\right)^2 - 8}}.$$

Verwendet man noch  $\alpha(G) \geq k$ , so ergibt sich:

$$\alpha(G) \geq \frac{2n}{\left(d(G) + 1 + \frac{2}{n}\right) + \sqrt{\left(d(G) + 1 + \frac{2}{n}\right)^2 - 8}}.$$

Schreibt man  $\frac{n}{d(G)+1}$  als  $\frac{2n}{(d(G)+1)+(d(G)+1)}$ , so ist für große  $n$  die Verbesserung von (1.4) durch

$$\frac{2n}{\left(d(G) + 1 + \frac{2}{n}\right) + \sqrt{\left(d(G) + 1 + \frac{2}{n}\right)^2 - 8}} \geq \frac{n}{d(G) + 1}$$

leicht zu sehen.

### 1.3 Notation und Struktur der Arbeit

Im Folgenden wird kurz die verwendete Notation vorgestellt. Kapitel 2 stellt dann als ein wichtiges Resultat dieser Arbeit eine neue untere Schranke für die Unabhängigkeitszahl  $\alpha(G)$  vor, die anhand ausgewählter Beispiele veranschaulicht wird. Davon ausgehend lassen sich einfachere Schranken herleiten, die allesamt Verbesserungen der Caro-Wei-Schranke (1.1) darstellen und hinsichtlich anderer hier vorgestellter Schranken bewertet werden.

In Kapitel 3 wird der Beweis des neuen Resultats geführt, der über einen algorithmischen Zugang gehen wird. Auf Grundlage des gleichen Algorithmus entwickelte S. M. Selkow die Schranke aus Proposition 1.1.4, weshalb wir in Kapitel 4 genauer auf sein Resultat eingegangen möchten.

Die weiteren Kapitel zeigen Möglichkeiten auf, wie das neue Resultat unter gewissen Voraussetzungen zu verbessern wäre, und wie dies als möglicher Zugang zu Vermutung 1.1.3 von E. Bertam und P. Horak verwendet werden kann.

Wir nutzen die Standardnotation und -terminologie der Graphentheorie. Hierzu sei auf Standardliteratur der Graphentheorie, beispielsweise R. Diestels „Graphentheorie“ [Die96], verwiesen. Für diese Arbeit wichtige Definitionen werden dennoch kurz angegeben.

Wir betrachten einen einfachen, endlichen, ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit *Eckenmenge*  $V = V(G)$  und *Kantenmenge*  $E = E(G)$ . Für eine Ecke  $v \in V(G)$  und eine positive Zahl  $q \in \mathbb{N}$  bezeichnen wir  $N_{q,G}(v) := \{u \in V(G) \mid \text{dist}(u, v) = q\}$  als die *q-te Nachbarschaft von v*, wobei mit  $\text{dist}(u, v)$  die Anzahl der Kanten eines kürzesten Weges von  $u$  nach  $v$  in  $G$  bezeichnet wird. Für die direkte Nachbarschaft in  $G$  schreiben wir kurz  $N_G(v)$  statt  $N_{1,G}(v)$  und mit  $N_G[v] := N_G(v) \cup \{v\}$  benennen wir die *abgeschlossene Nachbarschaft von v*. Der *Grad einer Ecke* ist  $d_G(i) := |N_G(i)|$ , mit  $\delta(G)$  und  $\Delta(G)$  bezeichnen wir *Minimal- und Maximalgrad* des Graphen  $G$ . Die *Unabhängigkeitszahl* eines Graphen sei mit  $\alpha(G)$  beschrieben. Ein Graph, dessen Eckenmenge sich in zwei unabhängige Mengen partitionieren lässt, nennen wir einen bipartiten Graphen.

Mit  $\mathbf{P}(A)$  bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A$ . Für ein weiteres Ereignis  $B$  ist  $\mathbf{P}(A \mid B)$  die Wahrscheinlichkeit von  $A$  unter der Bedingung, dass das Ereignis  $B$  eingetreten ist. Der Erwartungswert einer Zufallsgröße  $X$  wird mit  $\mathbf{E}(X)$  beschrieben.

## 2 Eine neue untere Schranke für die Unabhängigkeitszahl

Nach grundlegenden Vorbereitungen wird in diesem Kapitel – als eines der zentralen Resultate dieser Arbeit – eine neue, allgemeine Schranke für die Unabhängigkeitszahl  $\alpha(G)$  vorgestellt. Zwei Beispiele erläutern ihre Berechnung, bevor kritische Überlegungen die Forderung nach einfacheren, aus dem allgemeinen Resultat abgeleiteten Schranken motiviert. Ein Beweis wird im darauffolgenden Kapitel 3 geführt.

### 2.1 Formulierung des Resultats

Die hier vorgestellte Schranke ist wie die Caro-Wei-Schranke aus [Proposition 1.1.1](#) eine Summation über die Eckenmenge  $V(G)$ , wobei sich herausstellen wird, dass die einzelnen Summanden gerade aus  $\frac{1}{d_G(v)+1}$  wie in  $CW(G)$  und einem weiteren, nicht-negativen Teil bestehen. Wir erhalten somit eine Verbesserung der Caro-Wei-Schranke. Da für die Berechnung die Struktur des ganzen Graphen genutzt wird, gehört sie zur letzten Kategorie der Einteilung aus Kapitel 1. Die benötigten Informationen zum Bestimmen der Summanden erhalten wir aus speziellen Untergraphen, die nun definiert werden.

#### Definition 1

Zu  $v \in V(G)$  sei  $H$  ein sogenannter  $v$ -Graph, falls er folgende Eigenschaften erfüllt:

- a)  $H$  ist ein induzierter zusammenhängender Untergraph von  $G$  mit  $v \in V(H)$ .
- b) Es existiert eine gerade, nicht-negative ganze Zahl  $p = p(H)$ , so dass  $N_{p,H}(v) \neq \emptyset$  und  $N_{p+1,H}(v) = \emptyset$ .
- c) Für alle ungeraden Zahlen  $q \in \{1, \dots, p-1\}$  dominiert die Menge  $N_{q+1,H}(v)$  die Ecken aus  $N_{q,H}(v)$ ; das heißt, dass zu jeder Ecke  $u \in N_{q,H}(v)$  eine benachbarte Ecke  $w \in N_{q+1,H}(v)$  existiert.
- d) Für alle geraden Zahlen  $q \in \{2, \dots, p\}$  und je zwei  $a, b \in N_{q,H}(v)$  mit  $ab \in E(G)$ , gilt  $N_G(a) \cap N_{q-1,H}(v) = N_G(b) \cap N_{q-1,H}(v)$ .

Mit  $\mathcal{H}(v)$  bezeichnen wir die Menge aller  $v$ -Graphen  $H$  zu  $v \in V(G)$ .

Es ist zu bemerken, dass Eigenschaft d) trivialerweise erfüllt ist, wenn die Menge  $N_{q,H}(v)$  unabhängig ist. Befinden sich zwischen den Mengen  $N_{q,H}(v)$  und  $N_{q+1,H}(v)$  alle möglichen Kanten, so sind die Bedingungen c) und d) erfüllt. Diese beiden Situationen werden im Laufe dieser Arbeit öfters vorkommen.

Zu  $v \in V(G)$  sei ein  $v$ -Graph  $H$  mit den Mengen  $N_{q,H}(v)$  für  $q = 0, \dots, p(H)$  gegeben. Eine bijektive Abbildung von  $\{1, \dots, |N_{q,H}(v)|\}$  in die Menge  $N_{q,H}(v)$  für ein  $q$  nennen wir *Anordnung*, die Menge aller solcher Abbildungen bezeichnen wir mit  $\Pi(q, H)$ . Ein  $\pi \in \Pi(q, H)$  liefert ein *geordnetes Tupel* der Elemente aus  $N_{q,H}(v)$ , welches wir mit  $[N_{q,H}(v)]_\pi$  bezeichnen.

Sind zwei geordnete Tupel  $[M]$  und  $[M']$  gegeben, können wir diese „aneinanderreihen“, wodurch ein geordnetes Tupel mit den Elementen aus  $M \cup M'$  entsteht, welches wir mit  $[M \cup M']$  bezeichnen. Beispielsweise ist für  $[M] = (a, b)$  und  $[M'] = (c, d)$  die „Aneinanderreihung“ das geordnete Tupel  $[M \cup M'] = (a, b, c, d)$ .

Seien also  $(\pi_0, \dots, \pi_p) \in \Pi(0, H) \times \dots \times \Pi(p, H)$  Anordnungen für den  $v$ -Graphen  $H$  gegeben und reihen wir  $[N_{p,H}(v)]_{\pi_p}, [N_{p-1,H}(v)]_{\pi_{p-1}}, \dots, [N_{1,H}(v)]_{\pi_1}$  und  $[N_{0,H}(v)]_{\pi_0}$  aneinander, so erhalten wir ein Tupel  $[N_{p,H}(v) \cup N_{p-1,H}(v) \cup \dots \cup N_{1,H}(v) \cup N_{0,H}(v)] =: (u_1, u_2, \dots, u_{n_H})$ , dessen Elemente wir geordnet mit  $u_1, u_2, \dots, u_{n_H}$  bezeichnen.

Wir können jetzt die neue Schranke formulieren:

### Theorem 1

Zu  $v \in V(G)$  sei ein  $v$ -Graph  $H$  mit den Mengen  $N_{q,H}(v)$  für  $q = 0, \dots, p(H)$  und die Anordnungen  $(\pi_0, \dots, \pi_p) \in \Pi(0, H) \times \dots \times \Pi(p, H)$  gegeben. Die Ecken von  $H$  werden entsprechend  $(\pi_0, \dots, \pi_p)$  mit  $u_1, u_2, \dots, u_{n_H}$  benannt.

Hierauf definieren wir Zahlen

$$\begin{aligned} a_1(\pi_0, \dots, \pi_p) &:= |N_G[V(H)]| = |N_G[\{u_1, \dots, u_{n_H}\}]|, \\ a_s(\pi_0, \dots, \pi_p) &:= |N_G[\{u_s, \dots, u_{n_H}\}] \setminus \{u_1, \dots, u_{s-1}\}| \end{aligned} \quad (\diamond)$$

für  $s = 2, \dots, a_{n_H}$ .

Dann ist

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \sum_{H \in \mathcal{H}(v)} \sum_{(\pi_0, \dots, \pi_p) \in \Pi(0, H) \times \dots \times \Pi(p, H)} \frac{1}{a_1(\pi_0, \dots, \pi_p) \cdot \dots \cdot a_{n_H}(\pi_0, \dots, \pi_p)}. \quad (\star)$$

### Bemerkung

Betrachten wir zu einer Ecke  $v \in V(G)$  den  $v$ -Graphen  $H$  mit  $p(H) = 0$ . Dann ist  $H = (\{v\}, \emptyset)$  und für die Faktoren  $(\diamond)$  verbleibt nur  $a_1 = |N_G[V(H)]| = |N_G[v]| = d_G(v) + 1$ . Wir erhalten also den Summanden  $\frac{1}{d_G(v)+1}$  für  $(\star)$ ; das ist der Summand der Caro-Wei-Schranke.

Sei hingegen ein  $v$ -Graph  $H$  mit  $p(H) \neq 0$  gegeben. Dann sind alle Faktoren aus  $(\diamond)$  positiv und somit auch der Summand in  $(\star)$ . Damit stellen wir fest, dass [Theorem 1](#) eine Verbesserung von  $CW(G)$  in [Proposition 1.1.1](#) ist. Da  $p(H)$  gerade ist, muss  $p(H) \geq 2$  gelten. Es gibt dann zu  $v$  eine Ecke aus der gleichen Komponente, die nicht mit  $v$  adjazent ist.

Solche  $v$ -Graphen mit  $p(H) \neq 0$  existieren also immer dann, wenn es eine nichtleere zweite Nachbarschaft gibt. Besteht der Graph aus einer disjunkten Vereinigung von Cliquen, so ist die zweite Nachbarschaft jeder Ecke leer. Es gibt somit keine  $v$ -Graphen mit  $p(H) \neq 0$ . In diesem Fall ist unsere Schranke  $(\star)$  gleich der Caro-Wei-Schranke [\(1.1\)](#), welche schließlich auch nicht verbessert werden konnte.

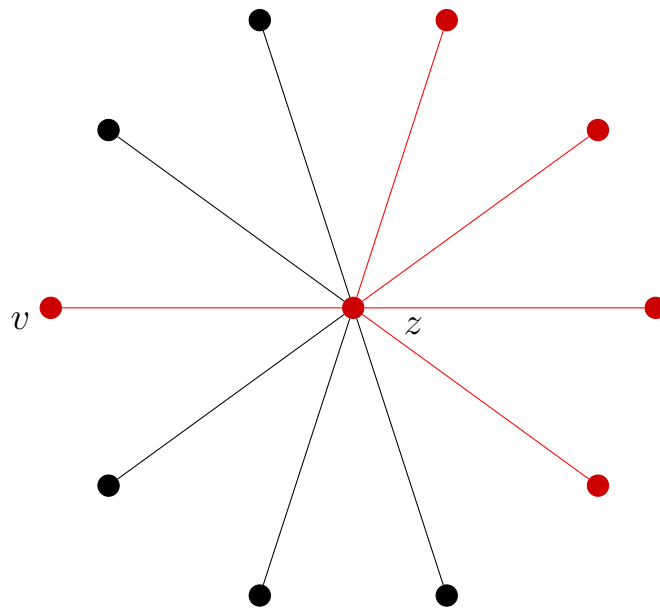
Um den Leser an das Theorem heranzuführen, werden wir es im Folgenden auf zwei kleine Beispiele anwenden.

## 2.2 Beispiele

Es hat sich gezeigt, dass die Untersuchung eines Sterns und eines Kreises sehr gut geeignet sind, um die Berechnung der Schranke exemplarisch aufzuzeigen.

### 2.2.1 Stern

Zu einer natürlichen Zahl  $k \geq 2$  sei  $G = K_{1,k}$  der Graph eines Sterns mit  $k$  Zacken. Hierbei bezeichnen wir den „Mittelpunkt“ mit  $z$ , das ist die Ecke vom Grad  $k$ .



Es ist leicht zu sehen, dass  $\alpha(K_{1,k}) = k$ . Die Caro-Wei-Schranke ist  $k \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{k+1}$ .

Wir möchten [Theorem 1](#) anwenden, um dem Leser einen ersten Eindruck der Verwendung des Resultats und eine Anleitung zur Berechnung von  $(\star)$  zu ermöglichen. Wir müssen dazu

$$T(v, H) := \sum_{(\pi_0, \dots, \pi_p) \in \Pi(0, H) \times \dots \times \Pi(p, H)} \frac{1}{a_1(\pi_0, \dots, \pi_p) \cdot \dots \cdot a_{n_H}(\pi_0, \dots, \pi_p)}$$

für alle  $H \in \mathcal{H}(v)$  bestimmen.

Dazu sei zuerst  $v = z$  der Mittelpunkt. Seine zweite Nachbarschaft ist leer, die Menge  $\mathcal{H}(z)$  besteht nur aus dem Punktgraphen  $(\{z\}, \emptyset)$  und  $T(z, H) = \frac{1}{k+1}$ , das ist der Summand der Caro-Wei-Schranke.

Sei nun  $v \in V(K_{1,k}) \setminus \{z\}$  und  $H \in \mathcal{H}(v)$  ein  $v$ -Graph mit  $p(H) \neq 0$ . Dann ist  $p(H) = 2$  und es gilt  $N_{0,H}(v) = \{v\}$ ,  $N_{1,H}(v) = \{z\}$  und  $N_{2,H}(v) \subseteq V(K_{1,k}) \setminus \{v, z\}$ ,  $N_{2,H}(v) \neq \emptyset$ . Der  $v$ -Graph  $H$  (beispielsweise in der Abbildung in rot dargestellt) hängt damit nur noch von  $N_{2,H}(v)$  ab, wir schreiben daher kurz  $m_H := |N_{2,H}(v)|$ . Aufgrund der Symmetrie des Graphen  $K_{1,k}$  ist der Summand  $T(v, H)$  von  $\pi_2 \in \Pi(2, H)$  unabhängig, diese Menge enthält  $m_H!$  Elemente.

Damit ergibt sich für (★)

$$\alpha(K_{1,k}) \geq \frac{1}{k+1} + \sum_{v \in V(K_{1,k}) \setminus \{z\}} \left( \frac{1}{2} + \sum_{\substack{H \in \mathcal{H}(v), \\ p(H)=2}} m_H! \cdot \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{m_H} \cdot a_z \cdot a_v} \right).$$

Für die Berechnung der Faktoren  $a_1, a_2, \dots, a_{m_H}, a_z, a_v$  in (◇) aus [Theorem 1](#) gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 &= |N_{K_{1,k}}[V(H)]| = |V(K_{1,k})| = k+1, \\ a_2 &= |N_{K_{1,k}}[V(H) \setminus \{u_1\}] \setminus \{u_1\}| = |V(K_{1,k}) \setminus \{u_1\}| = k, \\ &\vdots \\ a_{m_H} &= |N_{K_{1,k}}[\{v, z, u_{m_H}\}] \setminus \{u_1, \dots, u_{m_H-1}\}| = |V(K_{1,k}) \setminus \{u_1, \dots, u_{m_H-1}\}| = k+2-m_H, \\ a_z &= |N_{K_{1,k}}[\{v, z\}] \setminus N_{2,H}(v)| = |V(K_{1,k}) \setminus \{u_1, \dots, u_{m_H}\}| = k+1-m_H, \\ a_v &= |N_{K_{1,k}}[\{v\}] \setminus (N_{2,H}(v) \cup \{z\})| = |\{v\}| = 1. \end{aligned}$$

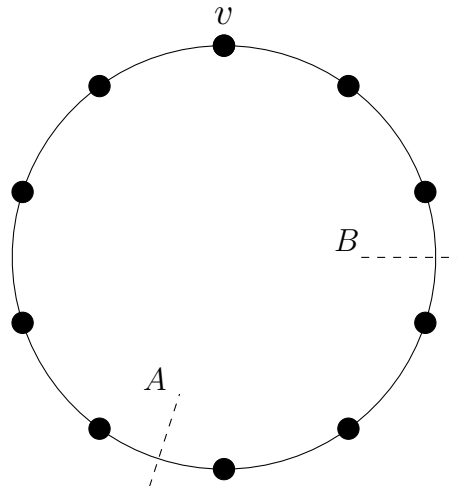
Statt  $H \in \mathcal{H}(v)$  mit  $p(H) = 2$  zu wählen, reicht es also  $m_H \in \{1, 2, \dots, k-1\}$  zu betrachten. Die Summe über  $\mathcal{H}$  reduziert sich zum Faktor  $\binom{k-1}{m_H}$  aufgrund der Möglichkeiten die Menge  $N_{2,H}(v)$  zu wählen. Es folgt als Abschätzung

$$\begin{aligned} \alpha(K_{1,k}) &\geq \frac{1}{k+1} + \sum_{v \in V(K_{1,k}) \setminus \{z\}} \left( \frac{1}{2} + \sum_{m_H=1}^{k-1} \binom{k-1}{m_H} \cdot m_H! \cdot \frac{1}{(k+1) \cdot k \cdot \dots \cdot (k+1-m_H) \cdot 1} \right) \\ &= \frac{1}{k+1} + k \cdot \frac{1}{2} + k \cdot \sum_{m_H=1}^{k-1} \frac{(k-1)!}{m_H! \cdot (k-1-m_H)!} \cdot m_H! \cdot \frac{(k-m_H)!}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{k+1} + k \cdot \frac{1}{2} + \sum_{m_H=1}^{k-1} \frac{k-m_H}{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1} + k \cdot \frac{1}{2} + \frac{(k-1) \cdot k - \frac{k \cdot (k-1)}{2}}{k+1} \\ &\geq \frac{k}{2} + \frac{k \cdot k - 1}{2 \cdot k + 1} > k-1 \end{aligned}$$

und somit gilt  $\alpha(K_{1,k}) \geq k$ , denn  $\alpha(G)$  muss ganzzahlig sein.

### 2.2.2 Kreis

Im Weiteren betrachten wir den Kreis  $C_{2k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit gerader Eckenanzahl und werden bereits hier sehen, dass die Berechnung der Schranke (★) schon wesentlich langwieriger sein wird.



Sei  $n$  eine gerade natürliche Zahl und  $G = C_n$  der Kreis mit  $n$  Ecken. Wir wählen eine beliebige Ecke  $v \in V(C_n)$ . Es ist leicht zu sehen, dass ein  $v$ -Graph  $H \in \mathcal{H}(v)$  aus einem Weg besteht, so dass von  $v$  ausgehend betrachtet,  $A$  weitere Ecken in linker Richtung folgen und sich  $B$  Ecken auf der rechten Seite befinden. Hierbei ist  $A, B \in \{0, 2, 4, \dots\}$ , damit Eigenschaft **b)** von [Definition 1](#) erfüllt ist. Somit hängt  $H \in \mathcal{H}(v)$  nur von  $v, A, B$  ab; wir schreiben daher  $H(v, A, B)$ .

Wir möchten [Theorem 1](#) verwenden, um eine Abschätzung für die Unabhängigkeitszahl  $\alpha(C_n)$  zu bekommen. Offensichtlich ist  $\alpha(C_n) = n/2$  und die Caro-Wei-Schranke  $CW(C_n) = n/3$ . Bei dem Beispiel mit dem Stern konnten wir feststellen, dass die Schranke den tatsächlichen Wert  $\alpha(G)$  getroffen hat. Wir wollen sehen, ob dies auch in diesem Beispiel der Fall ist.

Erneut soll

$$T(H(v, A, B)) := \sum_{(\pi_0, \dots, \pi_p) \in \Pi(0, H) \times \dots \times \Pi(p, H)} \frac{1}{a_1(\pi_0, \dots, \pi_p) \cdot \dots \cdot a_{n_H}(\pi_0, \dots, \pi_p)}$$

für alle  $H(v, A, B) \in \mathcal{H}(v)$ , abhängig von  $A$  und  $B$ , bestimmt werden.

- Zu Beginn sei  $A = B = 0$ . Dann ist  $p(H(v, 0, 0)) = 0$  und wir erhalten den Summanden der Caro-Wei-Schranke

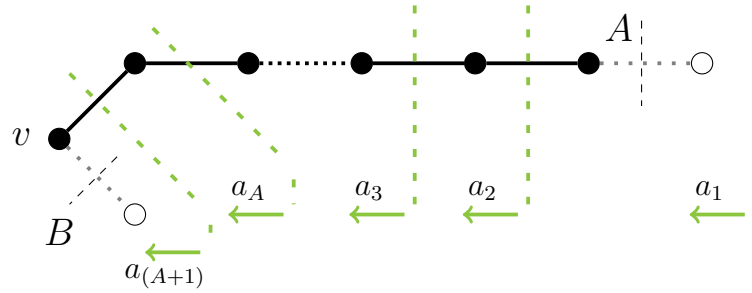
$$T(H(v, 0, 0)) = \frac{1}{d_{C_n}(v) + 1} = \frac{1}{3}.$$

- Sei jetzt nur noch  $B = 0$ , dann enthalten die Mengen  $N_{q, H(v, A, 0)}(v)$  genau ein Element und damit auch die Mengen  $\Pi(q, H(v, A, 0))$  für  $q = 1, \dots, A$ . Es folgt

$$T(H(v, A, 0)) = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{A+1}}$$

mit  $a_1 = |N_{C_n}[V(H(v, A, 0))]|$  und  $a_s = |N_{C_n}[\{u_s, \dots, u_{A+1}\}] \setminus \{u_1, \dots, u_{s-1}\}|$ , vergleiche hierfür (◇) in [Theorem 1](#). Die folgende Abbildung soll uns unterstützen, die Faktoren  $a_1, \dots, a_{A+1}$  zu bestimmen. Die Ecken  $V(H(v, A, 0))$  sind hierbei schwarz eingefärbt.





Die grünen Pfeile sollen verdeutlichen, welche Ecken für die Bestimmung der Faktoren  $a_s$  für  $s = 1, \dots, A + 1$  zu zählen sind. Der Leser vergleiche dies mit der Definition der Faktoren ( $\diamond$ ). Falls  $A = n - 2$  ist, dann entsprechen die beiden weißen Ecken in der Zeichnung der gleichen Ecke und dürfen nur einmal gezählt werden. Es gilt somit

$$\begin{aligned} a_1 &= \min\{A + 3, n\}, \\ a_2 &= A + 1, \\ a_3 &= A, \\ &\vdots \\ a_A &= 3, \\ a_{A+1} &= 2 \end{aligned}$$

und folglich

$$T(H(v, A, 0)) = \frac{1}{\min\{A + 3, n\} \cdot (A + 1)!}.$$

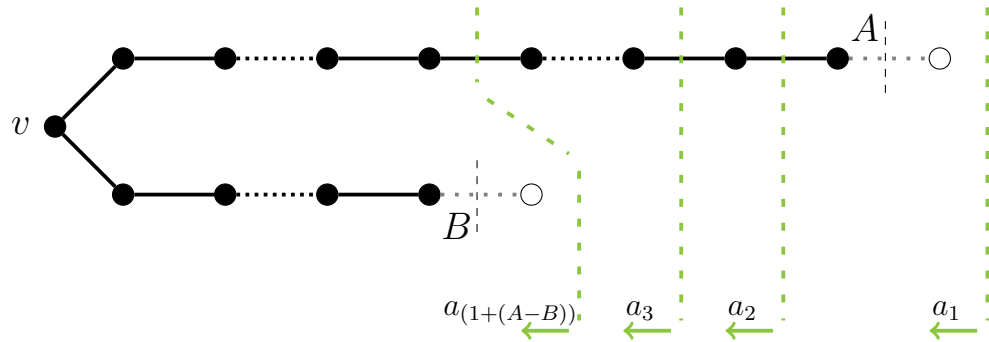
- Der Fall  $A = 0$  und  $B \neq 0$  wird analog betrachtet.
- Für den letzten Fall mit  $A$  und  $B$  ungleich Null nehmen wir an, dass  $A \geq B$  ist. Die Mengen  $N_{q,H}(v)$  für  $q = B + 1, \dots, A$  enthalten, sofern sie vorhanden sind, nur eine Ecke. Damit ist

$$\begin{aligned} T(H(v, A, B)) &= \sum_{(\pi_1, \dots, \pi_{B-1}) \in \Pi(1, H) \times \dots \times \Pi(B-1, H)} \sum_{\pi_B \in \Pi(B, H)} \frac{1}{a_1(\pi_1, \dots, \pi_B) \cdot \dots \cdot a_{n_{A+B+1}}(\pi_1, \dots, \pi_B)}, \end{aligned}$$

mit  $a_1 = |N_{C_n}[V(H(v, A, B))]|$  und  $a_s = |N_{C_n}[\{u_s, \dots, u_{A+B+1}\}] \setminus \{u_1, \dots, u_{s-1}\}|$ .

Dazu werden wir den Graphen  $H(v, A, B)$ , wie in den folgenden Schritten dargestellt, reduzieren, um die Größe der Faktoren  $a_1, a_2, \dots, a_{A+B+1}$  aus ( $\diamond$ ) zu bestimmen.

- Sei zunächst  $A > B$ . Wir starten mit der Berechnung von  $a_1, a_2, \dots, a_{1+(A-B)}$  für die Mengen  $N_{q,H}(v)$ , die genau eine Ecke enthalten.



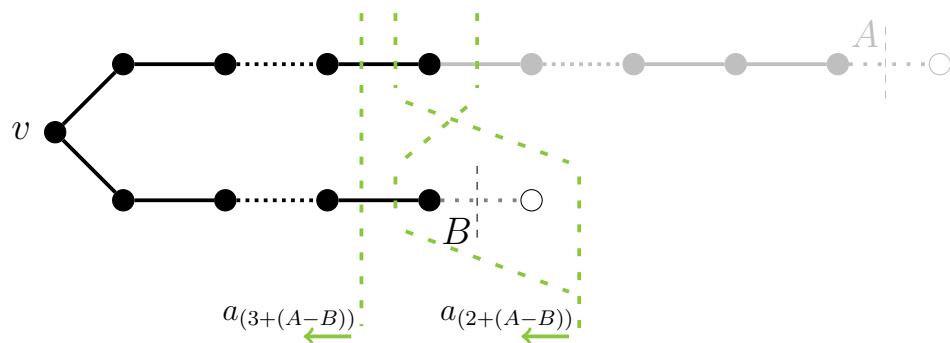
Ecken, die in der Abbildung übereinander abgebildet sind, befinden sich in derselben Menge  $N_{q,H}(v)$  für ein geeignetes  $q$ . Wiederum sind die Ecken aus  $V(H)$  schwarz eingefärbt. Falls  $A + B = n - 2$ , so entsprechen sich wieder die weißen Ecken. Die grünen Pfeile verdeutlichen erneut, welche Ecken für welchen Faktor zu zählen sind. Es folgt

$$\begin{aligned} a_1 &= \min\{A + B + 3, n\}, \\ a_2 &= A + B + 1, \\ a_3 &= A + B, \\ &\vdots \\ a_{1+(A-B)} &= 2B + 2. \end{aligned}$$

- Bevor wir die verbleibenden Ecken des Graphen  $H(v, A, B)$  in der folgenden Abbildung betrachten, stellen wir fest, dass die Berechnung von  $a_q(\pi_1, \dots, \pi_B)$  nicht von den Anordnungen  $\pi_1, \dots, \pi_{B-1}$  abhängt, das heißt

$$T(H(v, A, B)) = 2^{B-1} \cdot \sum_{\pi_B \in \Pi(B, H)} \frac{1}{a_1(\pi_B) \cdot \dots \cdot a_{n_{A+B+1}}(\pi_B)}.$$

Die Berechnung des nächsten Faktors  $a_{2+(A-B)}$  hängt von  $\pi_B \in \Pi(B, H)$  ab. Die folgende Abbildung verdeutlicht dies:



Es gilt

$$\begin{aligned}
a_{2+(A-B)} &= 2B \text{ oder } 2B + 1, \\
a_{3+(A-B)} &= 2B - 1, \\
a_{4+(A-B)} &= 2B - 2, \\
&\vdots \\
a_{A+B} &= 2, \\
a_{A+B+1} &= 1
\end{aligned}$$

und somit

$$T(H(v, A, B)) = 2^{B-1} \cdot \left( \frac{2B}{\min\{A+B+3, n\} \cdot (A+B+1)!} + \frac{2B+1}{\min\{A+B+3, n\} \cdot (A+B+1)!} \right).$$

– Der Fall  $B > A$  wird wieder analog behandelt und für den Spezialfall  $A = B$  ergibt sich

$$T(H(v, A, B = A)) = 2^B \cdot \frac{1}{\min\{A + B + 3, n\} \cdot (A + B + 1) \cdot (A + B - 1)!}.$$

Um nun die Unabhängigkeitszahl  $\alpha(C_n)$  für einen Kreis abzuschätzen, bestimmen wir (★) und fassen zusammen.

$$\begin{aligned}
\alpha(C_n) \geq n \cdot & \left( \frac{1}{3} \right. \\
& + \sum_{A \in \{2, 4, \dots, n-2\}} \frac{2}{\min\{A + 3, n\} \cdot (A + 1)!} \\
& + \sum_{A \in \{2, 4, \dots, \frac{n}{2}-1\}} 2^A \cdot \frac{1}{\min\{2A + 3, n\} \cdot (2A + 1) \cdot (2A - 1)!} \\
& \left. + \sum_{A \in \{2, 4, \dots, n-4\}} \sum_{B \in \{2, 4, \dots, n-A-2\}} 2^B \cdot \frac{4B + 1}{\min\{A + B + 3, n\} \cdot (A + B + 1)!} \right). \tag{2.1}
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung (2.1) erscheint wenig transparent und ist somit schwer zu deuten. Deswegen möchten wir zunächst für den Kreis  $C_6$  mit sechs Ecken die Formel berechnen.

$$\begin{aligned}
\alpha(C_6) \geq 6 \cdot & \left( \frac{1}{3} \right. \\
& + \sum_{A \in \{2, 4\}} \frac{2}{\min\{A + 3, 6\} \cdot (A + 1)!} \\
& + \sum_{A \in \{2\}} 2^A \cdot \frac{1}{\min\{2A + 3, 6\} \cdot (2A + 1) \cdot (2A - 1)!} \\
& \left. + \sum_{A \in \{2\}} \sum_{B \in \{2\}} 2^B \cdot \frac{4B + 1}{\min\{A + B + 3, 6\} \cdot (A + B + 1)!} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6 \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{5 \cdot 3!} + \frac{2}{6 \cdot 5!} + 4 \cdot \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3!} + 4 \cdot \frac{9}{6 \cdot 5!} \right) \\
&= 6 \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{360} + \frac{1}{45} + \frac{1}{20} \right) \\
&= \frac{57}{20} = 2,85 \geq \frac{6}{3} = CW(C_6).
\end{aligned}$$

Also muss  $\alpha(C_6) \geq 3$  gelten und in diesem Fall entspricht die Schranke dem tatsächlichen Wert  $\alpha(C_6) = 3$ .

Berechnet man Formel (2.1) für den Graphen  $G = C_{10}$ , so erhält man das Ergebnis 4,71. Dieser Wert ist besser als  $10 \cdot 2/5 = 4$ , welches sich aus der [Vermutung 1.1.3](#) von E. Bertram und P. Horak ergibt. Für Kreise ist die Vermutung bewiesen, denn der Maximalgrad dieser Graphen ist 2.

Betrachten wir das Resultat allgemein für Kreise  $C_n$  mit geradem  $n$  und lassen nun  $n \rightarrow \infty$  gehen. Es gilt  $\alpha(C_n)/n = 0,5$ . Wir versuchen durch verschiedene Abschätzungen den Grenzwert der Schranke (2.1) zu bestimmen, welcher idealerweise möglichst nahe der 0,5 sein sollte.

$$\begin{aligned}
0,5 = \frac{\alpha(C_n)}{n} &\geq \left( \frac{1}{3} \right. \\
&+ \sum_{A \in \{2,4,\dots,n-2\}} \frac{2}{\min\{A+3,n\} \cdot (A+1)!} \\
&+ \sum_{A \in \{2,4,\dots,\frac{n}{2}-1\}} 2^A \cdot \frac{1}{\min\{2A+3,n\} \cdot (2A+1) \cdot (2A-1)!} \\
&+ \left. \sum_{A \in \{2,4,\dots,n-4\}} \sum_{B \in \{2,4,\dots,n-A-2\}} 2^B \cdot \frac{4B+1}{\min\{A+B+3,n\} \cdot (A+B+1)!} \right) \\
&\geq \left( \frac{1}{3} \right. \\
&+ \sum_{A \in \{2,4,\dots,n-2\}} \frac{2}{(A+3) \cdot (A+1)!} \\
&+ \sum_{A \in \{2,4,\dots,\frac{n}{2}-1\}} \frac{2^A \cdot 2A}{(2A+3) \cdot (2A+1)!} \\
&+ \left. \sum_{\substack{C:=A+B \\ C \in \{4,6,\dots,n-2\}}} \sum_{B \in \{2,4,\dots,C-2\}} \frac{2^B \cdot (4B+1)}{(C+3) \cdot (C+1)!} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{1}{3} \right. \\
&\quad - \frac{2}{3} + 2 \cosh(1) - 2 \sinh(1) \\
&\quad + \frac{1}{16} (5\sqrt{2} \exp(\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}) - 6 \exp(\sqrt{2}) \\
&\quad\quad\quad + 12 \cos(\sqrt{2}) - 5\sqrt{2} \exp(-\sqrt{2}) - 6 \exp(-\sqrt{2})) \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} - \frac{65}{36} \cosh(2) + \frac{113}{72} \sinh(2) + \frac{20}{9} \cosh(1) - \frac{20}{9} \sinh(1) \right) \\
&\geq 0,47165.
\end{aligned}$$

Der dritte Übergang sind elementare Umformungen, die mit Maple<sup>©</sup> erstellt worden sind. Unsere Schranke erreicht nicht den gewünschten Wert von  $1/2$ , sie macht einen Fehler von etwa 6 %.

Das einfache Beispiel eines Kreises zeigt bereits, wie kompliziert es sein kann, alle Graphen  $H \in \mathcal{H}(v)$  zu finden, um die Formel (★) zu berechnen. Im Folgenden wird versucht, etwas einfachere Schranken aus [Theorem 1](#) abzuleiten. Damit wird es möglich sein, sie zu bewerten und mit anderen Schranken zu vergleichen.

## 2.3 Spezialisierungen des Resultats aus [Abschnitt 2.1](#)

Betrachten wir als weiteres Beispiel den vollständigen bipartiten Graphen  $K_{a,b}$  mit den beiden Farbklassen  $A$  und  $B$  mit  $a$  beziehungsweise  $b$  Elementen. Für diesen Graphen gilt trivialerweise

$$\begin{aligned}
\alpha(K_{a,b}) &= \max\{a, b\}, \\
CW(K_{a,b}) &= \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1}.
\end{aligned}$$

Wir möchten die Schranke (★) von [Theorem 1](#) für den Graphen  $K_{a,b}$  berechnen. Sei dazu eine beliebige Ecke  $v \in V(K_{a,b})$  fest gewählt. Ohne Einschränkung ist  $v = x_1 \in A := \{x_1, \dots, x_a\}$ . Neben dem Graphen  $(\{x_1\}, \emptyset)$  enthält jeder  $x_1$ -Graph  $H$  mit  $p(H) \geq 2$  eine nichtleere Teilmenge an Ecken aus  $B$  und eine weitere nichtleere Teilmenge aus  $A \setminus \{x_1\}$ .

Sei  $H \in \mathcal{H}(x_1)$  ein  $x_1$ -Graph mit  $n_A := |V(H) \cap (A \setminus \{x_1\})|$  und  $n_B := |V(H) \cap B|$  Ecken in den Mengen  $N_{2,H}(x_1)$  und  $N_{1,H}(x_1)$ . Wir möchten nun die Faktoren (◇) berechnen. Dazu stellen wir fest, dass  $u_1, \dots, u_{n_A} \in A \setminus \{x_1\}$ ,  $u_{n_A+1}, \dots, u_{n_A+n_B} \in B$  und  $u_{n_A+n_B+1} = x_1$  sind. Für  $s = 1, \dots, n_A + n_B$  enthält die Menge  $\{u_s, \dots, u_{n_A+n_B+1}\}$  mindestens eine Ecke aus  $A$  und mindestens eine aus  $B$ . Also ist  $N_{K_{a,b}}[\{u_s, \dots, u_{n_A+n_B+1}\}] = V(K_{a,b})$ .

Sofern  $p(H) \geq 2$  ist, gilt für die Faktoren  $a_s$  mit  $s = 1, \dots, n_A + n_B$

$$\begin{aligned} a_1 &= a + b, \\ a_2 &= a + b - 1, \\ &\vdots \\ a_{n_A} &= a + b - (n_A - 1), \\ a_{n_A+1} &= a + b - n_A, \\ &\vdots \\ a_{n_A+n_B} &= a + b - (n_A + n_B - 1), \end{aligned}$$

und für den letzten Faktor

$$a_{n_A+n_B+1} = |N_{K_{a,b}}[\{x_1\}] \setminus \{u_1, \dots, u_{n_A+n_B}\}| = |(\{x_1\} \cup B) \setminus (V(H) \cap B)| = b - n_B + 1.$$

Für die Schranke (★) aus [Theorem 1](#), die wir hier mit  $S(G)$  bezeichnen, gilt

$$\begin{aligned} S(K_{a,b}) &:= \sum_{v \in V(K_{a,b})} \sum_{H \in \mathcal{H}(v)} \sum_{(\pi_0, \dots, \pi_p) \in \Pi(0, H) \times \dots \times \Pi(p, H)} \frac{1}{a_1(\pi_0, \dots, \pi_p) \cdot \dots \cdot a_{n_H}(\pi_0, \dots, \pi_p)} \\ &= CW(K_{a,b}) \\ &\quad + \sum_{v \in A} \sum_{\substack{H \in \mathcal{H}(v), \\ V(H) \neq \{v\}}} \sum_{(\pi_B, \pi_A) \in \Pi(1, H) \times \Pi(2, H)} \frac{1}{a_1(\pi_B, \pi_A) \cdot \dots \cdot a_{n_H}(\pi_B, \pi_A)} \\ &\quad + \sum_{v \in B} \sum_{\substack{H \in \mathcal{H}(v), \\ V(H) \neq \{v\}}} \sum_{(\pi_A, \pi_B) \in \Pi(1, H) \times \Pi(2, H)} \frac{1}{a_1(\pi_A, \pi_B) \cdot \dots \cdot a_{n_H}(\pi_A, \pi_B)} \\ &= CW(K_{a,b}) \\ &\quad + \sum_{v \in A} \sum_{n_B=1}^b \sum_{n_A=1}^{a-1} \binom{b}{n_B} \binom{a-1}{n_A} \\ &\quad \quad \frac{n_B! \cdot n_A!}{(a+b) \cdot (a+b-1) \cdot \dots \cdot (a+b-n_A-n_B+1) \cdot (b-n_B+1)} \\ &\quad + \sum_{v \in B} \sum_{n_A=1}^a \sum_{n_B=1}^{b-1} \binom{a}{n_A} \binom{b-1}{n_B} \\ &\quad \quad \frac{n_A! \cdot n_B!}{(a+b) \cdot (a+b-1) \cdot \dots \cdot (a+b-n_A-n_B+1) \cdot (a-n_A+1)} \\ &= CW(K_{a,b}) \\ &\quad + \sum_{v \in A} \sum_{n_B=1}^b \sum_{n_A=1}^{a-1} \frac{b! \cdot (a-1)! \cdot ((a-n_A-1) + (b-n_B+1))!}{(b-n_B+1)! \cdot (a-1-n_A)! \cdot (a+b)!} \\ &\quad + \sum_{v \in B} \sum_{n_A=1}^a \sum_{n_B=1}^{b-1} \frac{a! \cdot (b-1)! \cdot ((a-n_A+1) + (b-n_B-1))!}{(a-n_A+1)! \cdot (b-1-n_B)! \cdot (a+b)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= CW(K_{a,b}) \\
&\quad + a \cdot \sum_{n_B=1}^b \sum_{n_A=0}^{a-2} \frac{b! \cdot (a-1)! \cdot (n_A + n_B)!}{n_B! \cdot n_A! \cdot (a+b)!} \\
&\quad + b \cdot \sum_{n_A=1}^a \sum_{n_B=0}^{b-2} \frac{a! \cdot (b-1)! \cdot (n_A + n_B)!}{n_A! \cdot n_B! \cdot (a+b)!} \\
&= CW(K_{a,b}) + \frac{a! \cdot b!}{(a+b)!} \cdot \left( \sum_{n_B=1}^b \sum_{n_A=0}^{a-2} \frac{(n_A + n_B)!}{n_B! \cdot n_A!} + \sum_{n_A=1}^a \sum_{n_B=0}^{b-2} \frac{(n_A + n_B)!}{n_B! \cdot n_A!} \right) \\
&\leq CW(K_{a,b}) + \frac{a! \cdot b!}{(a+b)!} \cdot \left( 2 \cdot \sum_{n_B=0}^b \sum_{n_A=0}^a \frac{(n_A + n_B)!}{n_B! \cdot n_A!} \right) \\
&= \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} + \frac{a! \cdot b!}{(a+b)!} \cdot 2 \cdot \left( \frac{(a+b+2)!}{(a+1)! \cdot (b+1)!} - 1 \right) \\
&\leq \frac{a \cdot (a+1) + b \cdot (b+1)}{(a+1) \cdot (b+1)} + \frac{2 \cdot (a+b+2) \cdot (a+b+1)}{(a+1) \cdot (b+1)} \\
&= \frac{3a^2 + 3b^2 + 4ab + 7a + 7b + 4}{(a+1) \cdot (b+1)}.
\end{aligned}$$

Ist  $a$  im Vergleich zu  $b$  hinreichend groß, dann ist  $\alpha(K_{a,b}) = a$  und einige Ausdrücke können vernachlässigt werden; für die Schranke ergibt sich

$$S(K_{a,b}) \approx \frac{3a}{b+1}.$$

Dieses Beispiel zeigt einige Nachteile der Schranke:

- Durch die Regularität des Graphen  $K_{a,b}$  war die Berechnung noch überstehbar. Ohne die Annahme der Regularität besteht die Schranke aus der Summe über alle Teilmengen von  $A$  und  $B$ . Weiterhin sind sämtliche Anordnungen der ausgewählten Teilmengen zu bestimmen. Diese Berechnung in dieser Form ist nicht in polynomialer Zeit durchführbar, denn die Anzahl der Summanden ist bereits überpolynomial.
- Für jedes  $c \in (0, 1)$  existiert ein passendes  $b$  derart, dass für große  $a$

$$S(K_{a,b}) \approx c \cdot \alpha(K_{a,b})$$

gilt. Die Schranke kann im Vergleich zum abzuschätzenden Wert  $\alpha(G)$  beliebig schlecht sein.

Im Folgenden werden wir versuchen, aus der recht allgemeinen Schranke transparentere abzuleiten.

Offensichtlich bleibt die Aussage des Theorems 1 richtig, wenn wir die Menge  $\mathcal{H}(v)$  der Graphen einschränken. Es werden nun zwei Möglichkeiten zu Reduktion der Menge  $\mathcal{H}(v)$  vorgestellt; zum einen werden in Abschnitt 2.3.1 nur noch von  $v$  ausgehende Wege als  $v$ -Graphen zugelassen. Dadurch bestehen die Mengen  $N_{q,H}(v)$  nur noch aus einem Element und alle Anordnungen entfallen. Zum anderen beschränken wir  $p(H)$  auf höchstens 2 für alle  $v$ -Graphen  $H$ . Hiermit muss zu jeder Ecke ausschließlich die erste und die zweite Nachbarschaft bestimmt werden. Dies wird in Abschnitt 2.3.2 erläutert.

### 2.3.1 Einschränkung auf Wege

Im Folgenden sei  $p \geq 0$  eine natürliche Zahl und  $v \in V(G)$  eine Ecke. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{P}_p(v)$  die Menge aller induzierter Wege mit  $p+1$  Ecken, die in  $v$  starten.

Für ein gerades natürliches  $p$  sei  $P \in \mathcal{P}_p(v)$ ,  $P = (v = v_0, v_1, v_2, \dots, v_p)$ , dann ist  $N_{q,P}(v) = \{v_q\}$  für alle  $q = 0, \dots, p$  und  $N_{p+1,P}(v) = \emptyset$ . Trivialerweise erfüllt  $P$  auch die Eigenschaften von [Definition 1, c\)](#) und [d\)](#). Somit ist  $P \in \mathcal{H}(v)$  und es gilt

$$\bigcup_{p=0,2,4,\dots} \mathcal{P}_p(v) \subseteq \mathcal{H}(v).$$

Man sieht, dass für einen  $v$ -Graphen  $P \in \mathcal{P}_p(v)$  die Anordnungen der Mengen  $N_{q,H}(v)$  entfallen, da es nur eine Ecke in den einzelnen Mengen  $N_{q,H}(v)$  für  $q = 0, \dots, p$  gibt. Damit ergibt sich folgendes Korollar:

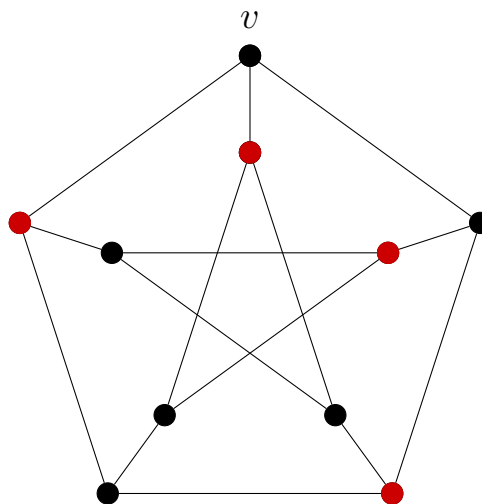
#### Korollar 2.3.1

Zu  $v \in V(G)$  und  $P \in \mathcal{P}_p(v)$ ,  $P = (v = v_0, v_1, v_2, \dots, v_p)$  für beliebiges gerades  $p \geq 0$  definieren wir die Zahlen  $n_q := |N_G[v_0] \cup N_G[v_1] \cup \dots \cup N_G[v_q]|$  für  $q = 0, \dots, p$ .

Dann ist

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \left( \frac{1}{n_0} + \sum_{p=2,4,\dots} \sum_{P \in \mathcal{P}_p(v)} \frac{1}{n_p \cdot (n_{p-1} - 1) \cdot \dots \cdot (n_0 - 1)} \right). \quad (2.2)$$

Betrachten wir auch hierzu ein kleines Beispiel. Sei  $G$  der Petersengraph mit 10 Ecken. Es ist leicht zu sehen, dass es eine unabhängige Menge der Größe 4 (siehe Skizze) gibt.



Die Caro-Wei-Schranke ([Proposition 1.1.1](#)) ergibt

$$\alpha(G) \geq CW(G) = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d_G(v) + 1} = \frac{10}{4} = 2,5.$$



Wir möchten nun [Korollar 2.3.1](#) anwenden. Dazu sei  $v \in V(G)$  gegeben. Wir untersuchen zuerst Wege der Länge 2. Von  $v$  ausgehend gibt es 6 solche Wege. Damit gilt

$$\sum_{v \in V(G)} \sum_{P \in \mathcal{P}_2(v)} \frac{1}{n_2 \cdot (n_1 - 1) \cdot (n_0 - 1)} = \sum_{v \in V(G)} 6 \cdot \frac{1}{8 \cdot 5 \cdot 3} = 10 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{2}.$$

Die Wege der Länge 2 liefern somit den Summanden  $1/2$ , welcher auf die Caro-Wei-Schranke addiert die untere Schranke 3 für  $\alpha(G) = 4$  ergibt. Wir möchten deshalb noch die Wege der Länge 4 betrachten. Hiervon gibt es von  $v$  ausgehend 12 verschiedene Wege. Wie man einfach nachrechnen kann, gilt:

$$\sum_{v \in V(G)} \sum_{P \in \mathcal{P}_4(v)} \frac{1}{n_4 \cdot (n_3 - 1) \cdot (n_2 - 1) \cdot (n_1 - 1) \cdot (n_0 - 1)} = \sum_{v \in V(G)} 12 \cdot \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{1}{63}.$$

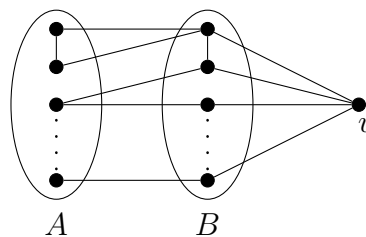
Dieser kleine Summand reicht aus, denn auf Grund von  $\alpha(G) \geq 3 + 1/63 > 3$  und der Tatsache, dass  $\alpha(G)$  immer ganzzahlig ist, haben wir in diesem Fall eine scharfe Schranke erhalten.

Wir haben die Menge  $\mathcal{H}(v)$  auf Wege beliebiger Länge eingeschränkt; das hat den Vorteil, dass alle Anordnungen entfallen sind. Wann immer wir weitere Graphen aus  $\mathcal{H}(v)$  zulassen, werden Anordnungen auf den Mengen  $N_{q,H}(v)$  hinzukommen. Um diese in den Griff zu bekommen, schränken wir  $p(H)$  auf  $p(H) \leq 2$  ein und müssen daher im Folgenden höchstens zwei Anordnungen einbeziehen.

### 2.3.2 Einschränkung auf zweite Nachbarschaft

Sei  $v \in V(G)$  eine Ecke und  $H \in \mathcal{H}(v)$  ein  $v$ -Graph mit  $N_{3,H}(v) = \emptyset$ . Dann erfüllt  $H$  die folgenden angepassten Eigenschaften aus [Definition 1](#), wobei wir mit  $A := N_{2,H}(v)$  und  $B := N_{1,H}(v)$  bezeichnen.

- $H$  ist ein induzierter zusammenhängender Untergraph von  $G$  mit  $v \in V(H)$ .
- Ist  $B \neq \emptyset$ , so ist auch  $A \neq \emptyset$ .
- Ist  $B \neq \emptyset$ , so existiert zu jeder Ecke  $u \in B$  eine benachbarte Ecke  $w \in A$ .
- Ist  $A \neq \emptyset$ , so gilt für je zwei  $a, b \in A$  mit  $ab \in E(G)$ , dass  $N_G(a) \cap B = N_G(b) \cap B \neq \emptyset$ .



Es folgt aus [Theorem 1](#) direkt folgendes Korollar, siehe auch bei [\[Kul16\]](#).

#### Korollar 2.3.2

Zu  $v \in V(G)$  definieren wir für  $A \subseteq N_{2,G}(v)$  und  $B \subseteq N_{1,G}(v)$ , welche die Eigenschaften [b\)](#), [c\)](#) und [d\)](#) erfüllen, Folgendes

- $n_A := |A|, n_B := |B|$ ,
- zu der Anordnung  $\pi_A \in \Pi(A)$  sei  $(a_1, a_2, \dots, a_{n_A})$  das geordnete dazugehörige Tupel,

- zu der Anordnung  $\pi_B \in \Pi(B)$  sei  $(b_1, b_2, \dots, b_{n_B})$  das geordnete dazugehörige Tupel,
- $c_1(\pi_A, \pi_B) := |N_G[A \cup B \cup \{v\}]|$ ,
- $c_i(\pi_A, \pi_B) := |N_G[\{a_i, \dots, a_{n_A}\} \cup B \cup \{v\}] \setminus \{a_1, \dots, a_{i-1}\}|$  für  $i = 1, \dots, n_A$ ,
- $d_1(\pi_A, \pi_B) := |N_G[B \cup \{v\}] \setminus A|$ ,
- $d_i(\pi_A, \pi_B) := |N_G[\{b_i, \dots, b_{n_B}\} \cup \{v\}] \setminus (A \cup \{b_1, \dots, b_{i-1}\})|$  für  $i = 1, \dots, n_B$ .

Dann ist

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \sum_{\substack{A \subseteq N_{2,G}(v), \\ B \subseteq N_{1,G}(v), \\ b), c), d) \text{ erfüllt}}} \sum_{\substack{\pi_A \in \Pi(A), \\ \pi_B \in \Pi(B)}} \frac{1}{c_1(\pi_A, \pi_B) \cdot \dots \cdot c_{n_A}(\pi_A, \pi_B) \cdot d_1(\pi_A, \pi_B) \cdot \dots \cdot d_{n_B}(\pi_A, \pi_B) \cdot (d_G(v) + 1 - n_B)}.$$

### Bemerkung

Im Allgemeinen ist  $\text{dist}_H(v, u) \neq \text{dist}_G(v, u)$ . Da  $H$  ein Untergraph von  $G$  ist, gilt trivialerweise  $\text{dist}_H \geq \text{dist}_G$ . Ist  $\text{dist}_H(v, u) = 1$ , so ist auch  $\text{dist}_G(v, u) = 1$ , da  $N_H(v) \subseteq N_G(v)$ . Angenommen  $\text{dist}_H(v, u) = 2$  und  $\text{dist}_G(v, u) = 1$ , so ist  $uv \in E(G)$ , aber  $uv \notin E(H)$ ; dies widerspricht Punkt a), denn  $H$  ist ein induzierter Untergraph. Für  $H$  folgt somit aus  $\text{dist}_H(v, u) = 2$  die Bedingung  $\text{dist}_G(v, u) = 2$ . Daher können wir  $A \subseteq N_{2,G}(v)$  und  $B \subseteq N_{1,G}(v)$  in [Korollar 2.3.2](#) wählen.

Es sei angemerkt, dass der Sterngraph  $K_{1,k}$  mit  $k \in \mathbb{N}$  aus [Abschnitt 2.2.1](#) für [Korollar 2.3.2](#) ein Beispiel für eine Graphenklasse ist, bei der die Schranke scharf ist. Die für die Berechnung betrachteten Graphen  $H \in \mathcal{H}(v)$  erfüllten alle  $p(H) \leq 2$ .

Mit (★) haben wir eine neue Schranke für die Unabhängigkeitszahl gefunden und konnten einige Beispiele angeben, bei denen gute Ergebnisse erzielt werden. Nachteile der neuen Schranke motivierten uns, einfachere und transparentere Schranken aus dem allgemeinen Resultat von [Theorem 1](#) abzuleiten. Im Folgenden werden wir die Resultate bewerten und mit Bekanntem aus der Literatur vergleichen.

## 2.4 Bemerkungen zu dem Resultat

Nach einer kurzen Bemerkung zur Berechenbarkeit der in diesem Kapitel aufgestellten Schranken, werden wir auf verschiedene Weisen diese mit Schranken aus [Abschnitt 1.1](#) vergleichen.

### 2.4.1 Kurze Hinweise zur NP-Problematik

Wie im letzten Abschnitt bereits festgestellt, ist die Berechnung unserer Schranke (★) im Allgemeinen schwierig. Eine Vereinfachung liefern die beiden Korollare [2.3.1](#) und [2.3.2](#). Bei der Bestimmung der  $v$ -Graphen  $H \in \mathcal{H}(v)$  können jedoch die Wege mit wachsendem Graphen  $G$  beliebig lang ([Korollar 2.3.1](#)) beziehungsweise die Mengen  $A$  und  $B$  beliebig groß ([Korollar 2.3.2](#)) werden. Wir wollen durch einfache weitere Beschränkungen der Menge  $\mathcal{H}(v)$  Schranken generieren, die sich sicher in polynomialer Zeit berechnen lassen.

Beginnen wir mit [Korollar 2.3.1](#) und schränken die maximale Länge der betrachteten Wege ein, das heißt für ein natürliches  $k$  soll  $p(P) \leq k$  für alle  $v$ -Graphen  $P$  gelten. Es folgt durch einfache Abschätzung der Summanden folgende Schranke:

**Korollar 2.4.1**

Es sei  $k$  eine gerade natürliche Zahl. Zu  $v \in V(G)$  und  $P \in \mathcal{P}_p(v)$ ,  $P = (v = v_0, v_1, v_2, \dots, v_p)$  für beliebiges gerades  $p = 0, 2, 4, \dots, k$  definieren wir die Zahlen  $n_q := \sum_{i=0}^q d_G(v_i) - q + 1$  für  $q = 0, \dots, p$ .

Dann gilt

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \left( \frac{1}{n_0} + \sum_{p=2,4,\dots,k} \sum_{P \in \mathcal{P}_p(v)} \frac{1}{n_p \cdot (n_{p-1} - 1) \cdot \dots \cdot (n_0 - 1)} \right).$$

Für festes  $k$  (unabhängig von  $n = |V(G)|$ ) ist die Berechnung der Schranke einfach in dem Sinne, dass die Schranke in polynomialer Zeit in  $n$  berechnet werden kann, wobei leicht zu sehen ist, dass der Grad dieses Polynoms eine Funktion in  $k$  ist.

Wir können auch [Korollar 2.3.2](#) leicht abändern, so dass wir eine „einfache“ Schranke erhalten. Dazu müssen wir die Größe der Mengen  $A$  und  $B$  beschränken.

**Korollar 2.4.2**

Es sei  $k$  eine natürliche Zahl. Es gelten weiterhin die Voraussetzungen von [Korollar 2.3.2](#) und zusätzlich gilt  $n_A, n_B \leq k$ .

Dann ist

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \sum_{\substack{A \subseteq N_{2,G}(v), \\ B \subseteq N_{1,G}(v), \\ |A|, |B| \leq k, \\ b), c), d) \text{ erfüllt}}} \sum_{\substack{\pi_A \in \Pi(A), \\ \pi_B \in \Pi(B)}} \frac{1}{c_1(\pi_A, \pi_B) \cdot \dots \cdot c_{n_A}(\pi_A, \pi_B) \cdot d_1(\pi_A, \pi_B) \cdot \dots \cdot d_{n_B}(\pi_A, \pi_B) \cdot (d_G(v) + 1 - n_B)}.$$

Für festes  $k$  (unabhängig von  $n = |V(G)|$ ) ist die Berechnung der Schranke einfach in dem Sinne, dass es von den Mengen  $A$  und  $B$  nur polynomial in  $n$  viele gibt und die Anzahl der Anordnungen der Ecken aus  $A$  und  $B$  von  $n$  unabhängig ist. Mit ähnlichen Überlegungen wie oben ergibt sich, dass diese Schranke in polynomialer Zeit in  $n$  berechnet werden kann.

Im Falle schwer berechenbarer Parameter, wie beispielsweise der Unabhängigkeitszahl, sucht man möglichst gute und gleichzeitig schnell zu berechnende Schranken. Das gilt für die in [Abschnitt 1.1](#) vorgestellten Resultate aus [Proposition 1.1.1](#) bis [1.1.5](#). Wir stellen diese daher im Folgenden den [Korollaren 2.4.1](#) und [2.4.2](#) gegenüber.

### 2.4.2 Vergleiche mit anderen Schranken

Zuerst stellt man fest, dass [Theorem 1](#) und alle daraus abgeleiteten Schranken Verbesserungen der Caro-Wei-Schranke aus [Proposition 1.1.1](#) sind.

Wir werden nun [Korollar 2.4.1](#) für  $p(H) \leq k = 2$  mit der Schranke von O. Murphy aus [Proposition 1.1.2](#) vergleichen.

Hierzu sind

$$S(G) := CW(G) + \sum_{v \in V(G)} \sum_{P=(v,u,w) \in \mathcal{P}_2(v)} \frac{1}{(d_G(v)+d_G(u)+d_G(w)-1) \cdot (d_G(v)+d_G(u)-1) \cdot d_G(v)} \quad (2.3)$$

die Schranke aus [Korollar 2.4.1](#) und

$$M(G) := CW(G) + \frac{CW(G) - 1}{\Delta(\Delta + 1)} \quad (2.4)$$

die Schranke von O. Murphy.

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit der Eigenschaft, dass

$$|N_{2,G}(v)| \geq \frac{2 \cdot (3\Delta - 1)}{\Delta + 1} \quad (2.5)$$

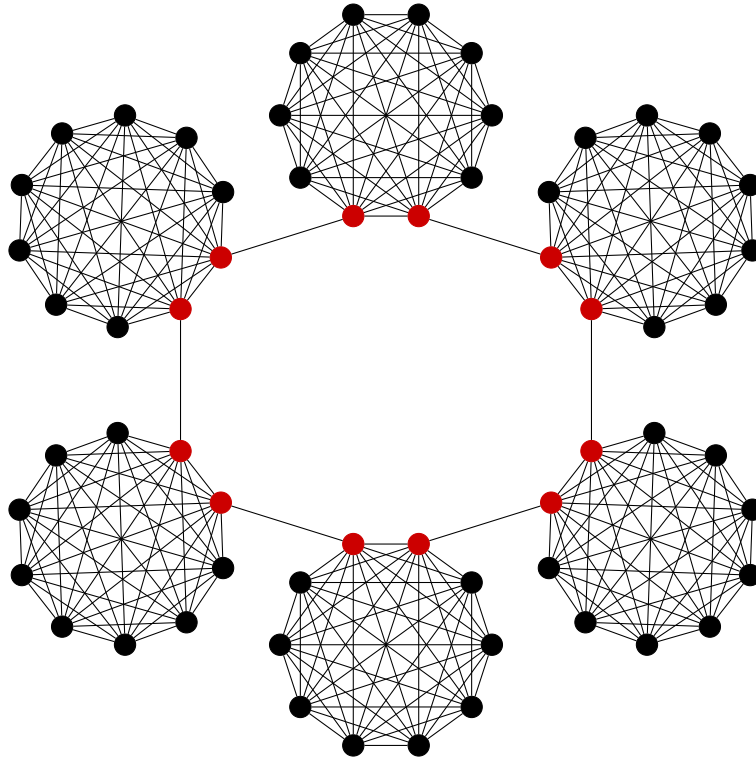
für alle Ecken  $v \in V(G)$  gilt.

Dann gilt für jede Ecke  $v \in V(G)$

$$\begin{aligned} & \sum_{P=(v,u,w) \in \mathcal{P}_2(v)} \frac{1}{(d_G(v) + d_G(u) + d_G(w) - 1) \cdot (d_G(v) + d_G(u) - 1) \cdot d_G(v)} \\ & \geq \sum_{P=(v,u,w) \in \mathcal{P}_2(v)} \frac{1}{(3\Delta - 1) \cdot (2\Delta - 1) \cdot d_G(v)} \\ & = \frac{1}{(3\Delta - 1) \cdot (2\Delta - 1) \cdot d_G(v)} \underbrace{\sum_{P=(v,u,w) \in \mathcal{P}_2(v)} 1}_{\geq |N_{2,G}(v)|} \\ & \geq \frac{1}{(3\Delta - 1) \cdot (2\Delta - 1) \cdot d_G(v)} \cdot |N_{2,G}(v)| \\ & \geq \frac{1}{2(3\Delta - 1) \cdot \Delta \cdot (d_G(v) + 1)} \cdot \frac{2(3\Delta - 1)}{\Delta + 1} \\ & \geq \frac{1}{(d_G(v) + 1) \Delta (\Delta + 1)}. \end{aligned}$$

und mit der Summe über alle Ecken  $v \in V(G)$  folgt, dass [\(2.3\)](#) größer als [\(2.4\)](#) ist.

Wir haben mit unserer sehr einfachen Schranke  $S(G)$  bereits für viele Graphen ein bessere Ergebnisse erzielen können als O. Murphy. Dennoch gibt es auch Graphen, bei denen die Schranke von O. Murphy einen größeren Wert ergibt. Hierzu sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der aus sechs Cliques mit jeweils zehn Ecken, wie in der folgenden Abbildung verdeutlicht, konstruiert ist. Die Anzahl und Größe der Cliques ist hierbei so gewählt, dass die Anzahl der schwarzen Ecken ausreichend groß ist, so dass die Schranke  $M(G)$  aus [\(2.4\)](#) einen größeren Wert liefert als  $S(G)$  aus [\(2.3\)](#).

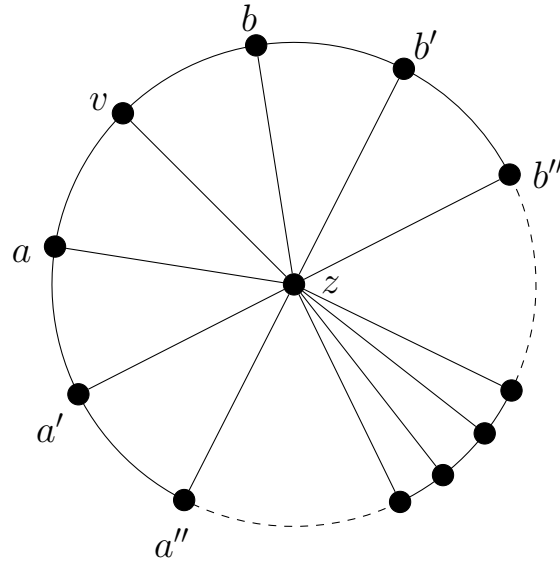


Die roten Ecken haben Grad 10, die schwarzen Grad 9. Es fällt auf, dass die zweite Nachbarschaft der schwarzen Ecken jeweils nur zwei rote Ecken beinhaltet, damit ist die Bedingung (2.5) für solche Ecken nicht erfüllt. Wir wollen die beiden Schranken explizit nachrechnen.

$$\begin{aligned}
 CW(G) &= \frac{6 \cdot 8}{10} + \frac{6 \cdot 2}{11} \approx 5,891, \\
 M(G) &= CW(G) + \frac{CW(G) - 1}{10 \cdot 11} \approx 5,935, \\
 S(G) &\approx 5,934.
 \end{aligned}$$

Somit gilt hier  $M(G) > S(G)$  und beide Schranken sind nicht vergleichbar.

Als nächstes möchten wir [Korollar 2.4.2](#) mit dem Resultat von E. Angel, R. Campigotto und C. Laforest aus [Proposition 1.1.5](#) vergleichen. Wir werden nicht wie für die Schranke von O. Murphy durch eine Ungleichungskette ein Kriterium wie (2.5) für Graphen finden, für die unsere Schranke besser ist, sondern die Formeln für eine einfache Graphenklasse explizit berechnen. Die Autoren vergleichen in ihrer Arbeit [\[ACL13\]](#) ihre Schranke mit einem anderen Resultat aus der Literatur [\[Har11\]](#). Sie untersuchen die sogenannten Radgraphen und zeigen hierbei, dass die Differenz der beiden Schranken um einen beliebig großen Wert anwachsen kann und somit ihre Schranke in diesem Fall besser ist. Der Radgraph  $W_n$  mit  $n$  Ecken besteht aus einem Kreis  $C_{n-1}$  und einer zusätzlichen „zentralen“ Ecke, die mit jeder anderen Ecke des Kreises adjazent ist; hierzu sein auf die folgende Abbildung verwiesen. Wir möchten im Folgenden [Korollar 2.4.2](#) auf diese Radgraphen  $W_n$  anwenden. Für alle Umformungen der folgenden Ausdrücke werden wir Maple<sup>©</sup> verwenden, denn solche Rechnungen können leichter und sicherer mit Hilfe des Computers durchgeführt werden.



Betrachten wir eine Ecke  $v \in V(W_n) \setminus \{z\}$ , wobei mit  $z$  die Ecke vom Grad  $n - 1$  gemeint ist. Es ist leicht zu sehen, dass  $N_{1,W_n}(v) = \{a, b, z\}$  und  $N_{2,W_n}(v) = V(W_n) \setminus \{a, b, v, z\}$  ist. Wir analysieren die Bedingungen aus [Korollar 2.3.2](#), es muss gelten:

- a)  $z \notin B \Rightarrow A \subseteq \{a', b'\}$ ,
- b)  $A \neq \emptyset \Leftrightarrow B \neq \emptyset$ ,
- c)  $a \in B \Rightarrow a' \in A$  und  $b \in B \Rightarrow b' \in A$ ,
- d)  $a' \in A \Rightarrow a'' \notin A$  und  $b' \in A \Rightarrow b'' \notin A$ .

Es folgt

$$\begin{aligned}
 S(W_n) := & \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{für } z} + \sum_{v \in V(W_n) \setminus \{z\}} \left( \underbrace{\frac{1}{4}}_{B=\emptyset} + \underbrace{\frac{1}{6 \cdot 4 \cdot 3}}_{B=\{a\}} \cdot \underbrace{2}_{B=\{b\}} + \underbrace{\frac{1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}_{B=\{a,b\}} \cdot \underbrace{2!}_{|\pi_B|=2} \cdot \underbrace{2!}_{|\pi_A|=2} \right) \\
 & + \underbrace{\sum_{\substack{A \subseteq V(W_n) \setminus \{a,b,v,z\}, \\ A \neq \emptyset, |A| \leq k}} \frac{|A|!}{\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(|A|-1))}_{c_{|A|}} \cdot \underbrace{(n-|A|)}_{d_1}}}_{B=\{z\}} \\
 & + 2 \cdot \underbrace{\sum_{\substack{A \subseteq V(W_n) \setminus \{a,a'',b,v,z\}, \\ a' \in A, |A| \leq k}} \left( \frac{|A|!}{\underbrace{n \cdot \dots \cdot (n-|A|)}_{d_1} \cdot \underbrace{(n-|A|-1)}_{d_2}} \right)}_{\substack{B=\{a,z\} \\ B=\{b,z\}}} \underbrace{\left( \frac{|A|!}{\underbrace{n \cdot \dots \cdot (n-|A|)}_{d_1} \cdot \underbrace{3 \cdot 2}_{d_2}} \right)}_{\pi_B = \begin{cases} 1 \rightarrow a \\ 2 \rightarrow z \end{cases}} \\
 & \underbrace{\left( \frac{|A|!}{\underbrace{n \cdot \dots \cdot (n-|A|)}_{d_1} \cdot \underbrace{3 \cdot 2}_{d_2}} \right)}_{\pi_B = \begin{cases} 1 \rightarrow z \\ 2 \rightarrow a \end{cases}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \sum_{\substack{A \subseteq V(W_n) \setminus \{a, a'', b, b'', v, z\}, \\ a', b' \in A, |A| \leq k \\ B = \{a, b, z\}}} \left( \frac{|A|!}{n \cdot \dots \cdot (n - |A|) \cdot (n - |A| - 1) \cdot (n - |A| - 2)} \cdot 2 \right) \cdot 2 \\
 &\quad \pi_B = \begin{cases} 1 \rightarrow a \\ 2 \rightarrow b \\ 3 \rightarrow z \end{cases} \quad \pi_B = \begin{cases} 1 \rightarrow b \\ 2 \rightarrow a \\ 3 \rightarrow z \end{cases} \\
 &+ \frac{|A|!}{n \cdot \dots \cdot (n - |A|) \cdot (n - |A| - 1) \cdot 2} \cdot 2 \quad \cdot 2 \\
 &\quad \pi_B = \begin{cases} 1 \rightarrow a \\ 2 \rightarrow z \\ 3 \rightarrow b \end{cases} \quad \pi_B = \begin{cases} 1 \rightarrow b \\ 2 \rightarrow z \\ 3 \rightarrow a \end{cases} \\
 &+ \frac{|A|!}{n \cdot \dots \cdot (n - |A|) \cdot 3 \cdot 2} \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \\
 &\quad \pi_B = \begin{cases} 1 \rightarrow z \\ 2 \rightarrow a \\ 3 \rightarrow b \end{cases} \quad \pi_B = \begin{cases} 1 \rightarrow z \\ 2 \rightarrow b \\ 3 \rightarrow a \end{cases}
 \end{aligned}$$

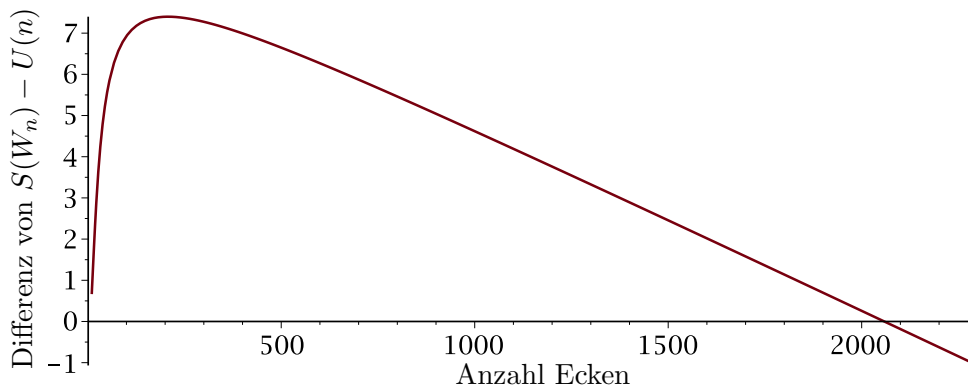
Für  $k = 10$  erhalten wir beispielsweise

$$S(W_n) = \frac{1}{96} \frac{27n^6 + 523n^5 - 30665n^4 + 505157n^3 - 4239130n^2 + 18611448n - 34204032}{(n-5)n(n-2)(n-3)(n-4)} \approx 0,2813n.$$

Die Schranke aus [Proposition 1.1.5](#) ist für den Radgraphen bereits in [\[ACL13\]](#) berechnet worden; sie wird dort für den Radgraphen  $W_n$  mit  $n$  Ecken mit  $U(n)$  bezeichnet:

$$U(n) := \frac{2}{21} \frac{(3n - 11) \cdot n}{n - 4} \approx 0,2857n.$$

Betrachten wir die Differenz  $S(W_n) - U(n)$ , so ist die Schranke aus [Korollar 2.4.2](#) für Graphen  $W_n$  bis  $n = 2058$  Ecken besser.



Für größeres  $k$  wäre der Wert  $S(W_n)$  auch noch für größeres  $n$  besser. Verzichtet man auf die Einschränkung  $k$  wie in [Korollar 2.3.2](#), so tendiert die Differenz  $S(W_n) - U(n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Auf ein Gegenüberstellen unserer Resultate mit denen von S. M. Selkow aus [Proposition 1.1.4](#) sei an dieser Stelle verzichtet. Wir werden in Kapitel 4 genauer darauf eingehen, nachdem wir im nächsten Kapitel den algorithmischen Beweis von [Theorem 1](#) untersucht haben.

## 3 Beweise

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit der allgemeinen Schranke aus [Theorem 1](#) des vorherigen Kapitels und führen einen Beweis an.

### 3.1 Beweis des Resultats aus Kapitel 2

Sei  $G = (V, E)$  wie zuvor schon ein einfacher, endlicher und ungerichteter Graph und  $n := |V(G)|$  die Anzahl der Ecken. Hierauf bezeichnen wir eine Bijektion der Eckenmenge  $V(G)$  in die Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$  als *Nummerierung*. Die Menge aller solcher Nummerierungen auf  $G$  sei  $S(G)$ . Die Mengen  $L_\phi(v) := \{u \in V \mid \phi(u) < \phi(v)\}$  und  $R_\phi(v) := \{u \in V \mid \phi(u) > \phi(v)\}$  für  $\phi \in S(G)$  beinhalten die Ecken mit kleinerer Nummer, beziehungsweise die Ecken mit größerer Nummer als  $\phi(v)$ .

Zu gegebener Nummerierung  $\phi \in S(G)$  stellt man leicht fest, dass die Menge

$$I_\phi := \{v \in V(G) \mid N_G(v) \cap L_\phi(v) = \emptyset\} \quad (3.1)$$

eine unabhängige Menge von  $G$  ist.

Formulieren wir dazu einen kurzen Algorithmus, dessen Ausgabe (3.1) erfüllt:

---

**Algorithmus 1** : Algorithmus zur Caro-Wei-Schranke

---

**Eingabe** : Einen Graphen  $G = (V, E)$  und eine Nummerierung  $\phi$  auf  $G$ .

**Ausgabe** : Eine unabhängige Menge  $I_\phi$ .

```
1  $I \leftarrow \emptyset$ ;  
2 für alle Ecke  $v \in V(G)$  tue  
3   | wenn  $N_G(v) \cap L_\phi(v) = \emptyset$  dann  
4   |   |  $I \leftarrow I \cup \{v\}$ ;  
5   | Ende  
6 Ende  
7  $I_\phi \leftarrow I$ 
```

---

Dieser Algorithmus kann verwendet werden, um die Caro-Wei-Schranke aus [Proposition 1.1.1](#) zu beweisen:

$$\alpha(G) \geq CW(G) = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d_G(v) + 1}. \quad (3.2)$$

**BEWEIS:** (VON (3.2)) Sei  $\phi \in S(G)$  zufällig gewählt, wobei wir von einer uniformen Verteilung der Nummerierungen in  $S(G)$  ausgehen. Für jedes  $\phi$  seien  $I_\phi$  die durch Algorithmus 1 erzeugte Ausgabe. Dann ist  $I_\phi$  die unabhängige Menge, die in (3.1) beschrieben wurde.



Somit gilt

$$\begin{aligned} \alpha(G) &\geq \mathbf{E}(|I_\phi|) = \sum_{v \in V(G)} \mathbf{P}(v \in I_\phi) = \sum_{v \in V(G)} \frac{|\{\phi \in S(G) \mid v \in I_\phi\}|}{|S(G)|} \\ &= \sum_{v \in V(G)} \frac{|\{\phi \in S(G) \mid v \in I_\phi\}|}{n!}. \end{aligned}$$

Wir werden nun  $|\{\phi \in S(G) \mid v \in I_\phi\}|$  bestimmen. Sei  $v \in V(G)$  und  $\phi \in S(G)$  derart, dass  $v \in I_\phi$  ist. Offensichtlich müssen alle Nachbarn von  $v$  eine größere Nummer haben, das heißt  $N_G(v) \subseteq R_\phi(v)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} X &:= \{\phi(u) \mid u \in N_G[v]\} \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ \phi(v) &:= \min(X) \end{aligned}$$

und

$$Z := \{\phi(u) \mid u \in N_G[v] \setminus \{v\}\} = X \setminus \{\min(X)\}.$$

Es gibt genau  $\binom{n}{d_G(v)+1}$  Möglichkeiten, Nummern aus  $\{1, \dots, n\}$  für die Ecken aus  $N_G[v]$  zu ziehen, das heißt die Menge  $X$  zu wählen. Die Ecke  $v$  erhält die kleinste Nummer aus  $X$ , es bleiben für die Zuordnung der restlichen Nummern  $Z$  zu den Ecken  $N_G(v)$  genau  $d_G(v)!$  Möglichkeiten. Außerdem verbleiben noch  $(n - (d_G(v) + 1))!$  Möglichkeiten, die restlichen Ecken mit den Nummern  $\{1, 2, \dots, n\} \setminus X$  zu nummerieren.

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} |\{\phi \in S(G) \mid v \in I_\phi\}| &= \binom{n}{d_G(v)+1} \cdot d_G(v)! \cdot (n - (d_G(v) + 1))! \\ &= \frac{n! \cdot d_G(v)! \cdot (n - (d_G(v) + 1))!}{(d_G(v) + 1)! \cdot (n - (d_G(v) + 1))!} \\ &= \frac{n!}{d_G(v) + 1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Der Beweis der neuen Schranke aus [Theorem 1](#) wird ähnlich sein. Zuerst modifizieren wir den Algorithmus etwas. Weiterhin sei eine Nummerierung  $\phi \in S(G)$  nebst einem Graphen  $G$  für [Algorithmus 2](#) gegeben.

---

**Algorithmus 2** : Algorithmus zu [Theorem 1](#)

---

**Eingabe** : Einen Graphen  $G = (V, E)$  und eine Nummerierung  $\phi$  auf  $G$ .

**Ausgabe** : Eine unabhängige Menge  $J_\phi$ .

```

1  $n \leftarrow |V(G)|$ ;  $J \leftarrow \emptyset$ ;  $U \leftarrow V(G)$ ;
2 solange  $U \neq \emptyset$  tue
3    $v \leftarrow \phi^{-1}(\min(\{\phi(u) \mid u \in U\}))$ ; // Ecke aus  $U$  mit kleinster Nummer.
4    $J \leftarrow J \cup \{v\}$ ;
5    $U \leftarrow U \setminus N_G[v]$ ;
6 Ende
7  $J_\phi \leftarrow J$ 

```

---

Hieraus erkennt man leicht folgende Aussagen:

**Lemma 3.1.1**

Für die Menge  $J_\phi$  aus Algorithmus 2 gilt

$$v \in J_\phi \Leftrightarrow N_G(v) \cap L_\phi(v) \cap J_\phi = \emptyset \quad (3.3)$$

und

$$v \in J_\phi \Rightarrow N_G(v) \cap R_\phi(v) \cap J_\phi = \emptyset. \quad (3.4)$$

BEWEIS: Sei  $v \in V(G)$  eine beliebige Ecke und definiere  $N_G^L(v) := N_G(v) \cap L_\phi(v)$  sowie  $N_G^R(v) := N_G(v) \cap R_\phi(v)$ .

- Ist  $N_G^L(v) \cap J_\phi \neq \emptyset$ , so existiert ein  $u \in N_G^L(v) \cap J_\phi$ . Somit gibt es in Algorithmus 2 eine Iteration mit Eckenmenge  $U$ , so dass  $u$  die kleinste Nummer hat. Es wird  $u$  in  $J_\phi$  aufgenommen und  $N_G[u]$  und somit auch  $v$  aus  $U$  entfernt und nicht weiter beachtet. Damit ist  $v \notin J_\phi$ .
- Sei  $N_G^L(v) \cap J_\phi = \emptyset$ , wir betrachten die Nachbarschaft  $N_G^L(v) \cap U$  in jedem Durchlauf der Schleife in Zeile 2 bis 6 des Algorithmus 2. Da in Zeile 5 die Menge  $U$  jedesmal echt verkleinert wird, wird auch  $N_G^L(v) \cap U$  kleiner, bis sie in irgendeiner Iteration leer ist. Bis hierhin befindet sich sicher  $v \in U$ . Solange es noch Ecken  $w \in L_\phi(v)$  gibt, verbleibt  $v \in U$ , da  $uw \notin E(G)$ . Gibt es kein  $w \in L_\phi(v)$ , so hat  $v$  die kleinste Nummer in  $U$  und wird in  $J_\phi$  aufgenommen.
- Ist  $v \in J_\phi$ , so gibt es einen Durchlauf in Algorithmus 2, in dem  $v$  in  $J_\phi$  aufgenommen wird. Damit wird aber  $N_G^R(v) \subseteq N_G(v)$  aus  $U$  entfernt und kann nicht mehr in  $J_\phi$  aufgenommen werden. Somit ist  $N_G^R(v) \cap J_\phi = \emptyset$ . ■

Wir müssen nun die Mächtigkeit  $|\{\phi \in S(G) \mid v \in J_\phi\}|$  für die Ausgabe  $J_\phi$  des Algorithmus 2 bestimmen, dazu beginnen wir mit einigen Definitionen und Vorbetrachtungen.

**Definition 2**

Zu  $v \in V(G)$  und  $\phi \in S(G)$  nennen wir einen  $v$ -Graphen  $H \in \mathcal{H}(v)$ , siehe dazu Definition 1,  $(v, \phi)$ -zulässig, falls Folgendes gilt:

- a) Für alle  $q = 0, \dots, p-1$  und alle  $w \in N_{q,H}(v)$  gilt, dass  $N_{q+1,H}(v) \subseteq L_\phi(w)$  ist.
- b) Für alle geraden  $q = 0, 2, \dots, p$  und alle  $w \in N_{q,H}(v)$  gilt, dass  $N_G(w) \cap L_\phi(w) \subseteq N_{q+1,H}(v) \cup N_{q,H}(v)$  ist.

**Lemma 3.1.2**

Sei  $v \in V(G)$ ,  $\phi \in S(G)$  und  $H \in \mathcal{H}(v)$  ein  $(v, \phi)$ -zulässiger  $v$ -Graph, dann ist  $N_{q,H}(v) \cap J_\phi = \emptyset$  für jede ungerade Zahl  $q \in \{1, \dots, p-1\}$ .

BEWEIS: Wir beginnen damit,  $N_{p-1,H}(v) \cap J_\phi = \emptyset$  zu zeigen. Dafür sei  $w \in N_{p-1,H}(v)$  beliebig gewählt und wir zeigen  $w \notin J_\phi$ . Nach Definition 1, c) ist  $N_G(w) \cap N_{p,H}(v)$  nicht leer. Hieraus wählen wir  $u \in N_G(w) \cap N_{p,H}(v)$  mit kleinstmöglicher Nummer; es gilt also  $u \in L_\phi(u')$  für alle  $u' \in N_G(w) \cap N_{p,H}(v) \setminus \{u\}$ .

Wir zeigen, dass  $u \in J_\phi$  ist, denn somit folgt  $w \notin J_\phi$ . Angenommen, dies ist nicht der Fall, dann existiert wegen [Lemma 3.1.1](#) ein  $a \in N_G(u) \cap L_\phi(u)$ . Nach [Definition 2, b\)](#) ist  $a \in N_{p,H}(v)$  und wegen [Definition 1, d\)](#) ist  $w \in N_G(a)$ , ein Widerspruch zur Wahl von  $u$ . Folglich ist  $N_G(u) \cap L_\phi(u) = \emptyset$  und mit der Äquivalenz [\(3.3\)](#) ist  $u \in J_\phi$ , womit  $w \notin J_\phi$  folgt.

Sein nun  $q \in \{1, \dots, p-3\}$  die größte ungerade Zahl, so dass  $N_{q,H}(v) \cap J_\phi \neq \emptyset$ . Angenommen, es existiert ein solches  $q$ , dann wähle  $w \in N_{q,H}(v)$  beliebig und wir zeigen wiederum  $w \notin J_\phi$ . Es sei erneut  $u \in N_G(w) \cap N_{q+1,H}(v)$  mit kleinstmöglicher Nummer; es gilt  $u \in L_\phi(u')$  für alle  $u' \in N_G(w) \cap N_{q+1,H}(v) \setminus \{u\}$ .

Wir zeigen, dass  $u \in J_\phi$  ist. Andernfalls sei wieder  $a \in N_G(u) \cap L_\phi(u)$ . Nach [Definition 2, b\)](#) kann  $a \in N_{q+2,H}(v)$  oder  $a \in N_{q+1,H}(v)$  sein. Wegen [Definition 1, d\)](#) und der Wahl von  $u$  ist  $a \in N_{q+2,H}(v)$ . Nach der Wahl von  $q$  ist aber  $a \notin J_\phi$ . Es folgt aus der Äquivalenz [\(3.3\)](#), dass  $u \in J_\phi$  ist, womit wieder  $w \notin J_\phi$  folgt.

Somit existiert folglich kein  $q$  mit genannter Eigenschaft und die Behauptung ist gezeigt.  $\blacksquare$

Mit obigem [Lemma 3.1.2](#) folgt  $N_{1,H}(v) \cap J_\phi = \emptyset$  und wieder mit [\(3.3\)](#) gilt folgendes Lemma:

### Lemma 3.1.3

Sei  $v \in V(G)$ ,  $\phi \in S(G)$  und  $H \in \mathcal{H}(v)$  ein  $(v, \phi)$ -zulässiger  $v$ -Graph, dann ist  $v \in J_\phi$ .

### Definition 3

Zu  $v \in V(G)$  und  $\phi \in S(G)$  sei  $H \in \mathcal{H}(v)$  ein  $v$ -Graph. Wir nennen ihn  $(v, \phi)$ -verträglich, falls er  $(v, \phi)$ -zulässig ist und für alle  $w \in V(H)$  die restliche Nachbarschaft  $w$  eine größere Nummer hat, das heißt, dass  $N_G(w) \setminus N_H(w) \subseteq R_\phi(w)$  gelten muss.

### Lemma 3.1.4

Sei  $v \in V(G)$ ,  $\phi \in S(G)$  eine beliebige Nummerierung und  $H, H' \in \mathcal{H}(v)$  zwei  $(v, \phi)$ -verträgliche  $v$ -Graphen, dann gilt  $H = H'$ .

BEWEIS: Da  $H$  und  $H'$  zwei induzierte Untergraphen sind, reicht es  $V(H) = V(H')$  zu zeigen.

Offensichtlich ist nach [Definition 1](#)

$$V(H) = \bigcup_{q=0}^{p(H)} N_{q,H}(v), \quad V(H') = \bigcup_{q=0}^{p(H')} N_{q,H'}(v),$$

und  $N_{0,H}(v) = N_{0,H'}(v) = \{v\}$ .

Sei nun  $q \geq 0$  maximal gewählt, so dass  $N_{q,H}(v) = N_{q,H'}(v) \neq \emptyset$  gilt. Angenommen, es gilt  $N_{q+1,H}(v) \neq N_{q+1,H'}(v)$ , dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine Ecke  $u \in N_{q+1,H}(v) \setminus N_{q+1,H'}(v)$  wählen. Damit muss  $u$  wegen [Definition 1, a\)](#) einen Nachbarn  $w \in N_{q,H}(v) = N_{q,H'}(v)$  besitzen. Wegen [Definition 2](#) ist  $u \in N_{q+1,H}(v) \subseteq L_\phi(w)$  und wegen [Definition 3](#) ist  $u \in N_G(w) \setminus N_{H'}(w) \subseteq R_\phi(w)$ , ein Widerspruch.

Folglich ist  $N_{q+1,H}(v) = N_{q+1,H'}(v)$  und nach Wahl von  $q$  ist  $N_{q+1,H}(v) = N_{q+1,H'}(v) = \emptyset$ . Damit gilt  $q = p(H) = p(H')$  und  $V(H) = V(H')$ .  $\blacksquare$

Wir bezeichnen mit

$$T(v, H) := \{\phi \in S(G) \mid H \text{ ist ein } (v, \phi)\text{-verträglicher } v\text{-Graph}\}.$$

Mit [Lemma 3.1.3](#) haben wir gezeigt, dass  $T(v, H) \subseteq \{\phi \in S(G) \mid v \in J_\phi\}$  gilt und wegen [Lemma 3.1.4](#) ist  $T(v, H) \cap T(v, H') = \emptyset$ , falls  $H, H' \in \mathcal{H}(v)$  mit  $H \neq H'$ . Wir können also die Mächtigkeit  $|\{\phi \in S(G) \mid v \in J_\phi\}|$  abschätzen, indem wir die Menge der  $(v, \phi)$ -verträglichen  $v$ -Graphen betrachten und  $T(v, H)$  bestimmen.

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, formulieren wir erneut das Theorem.

### Theorem 1

Zu  $v \in V(G)$  sei ein  $v$ -Graph  $H$  mit den Mengen  $N_{q,H}(v)$  für  $q = 0, \dots, p(H)$  und die Anordnungen  $(\pi_0, \dots, \pi_p) \in \Pi(0, H) \times \dots \times \Pi(p, H)$  gegeben. Die Ecken von  $H$  werden entsprechend  $(\pi_0, \dots, \pi_p)$  mit  $u_1, u_2, \dots, u_{n_H}$  benannt.

Hierauf definieren wir Zahlen

$$\begin{aligned} a_1(\pi_0, \dots, \pi_p) &:= |N_G[V(H)]| = |N_G[\{u_1, \dots, u_{n_H}\}]|, \\ a_s(\pi_0, \dots, \pi_p) &:= |N_G[\{u_s, \dots, u_{n_H}\}] \setminus \{u_1, \dots, u_{s-1}\}| \end{aligned} \quad (\diamond)$$

für  $s = 2, \dots, a_{n_H}$ .

Dann ist

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \sum_{H \in \mathcal{H}(v)} \sum_{(\pi_0, \dots, \pi_p) \in \Pi(0, H) \times \dots \times \Pi(p, H)} \frac{1}{a_1(\pi_0, \dots, \pi_p) \cdot \dots \cdot a_{n_H}(\pi_0, \dots, \pi_p)}. \quad (\star)$$

BEWEIS: (VON [THEOREM 1](#))

Zu einem beliebigen Graphen  $G = (V, E)$  sei  $J_\phi$  die Ausgabe des Algorithmus [2](#) für ein  $\phi \in S(G)$ . Wir haben im Beweis von [\(3.2\)](#) bereits gesehen, dass

$$\begin{aligned} \alpha(G) &\geq \mathbf{E}(|J_\phi|) = \sum_{v \in V(G)} \mathbf{P}(v \in J_\phi) = \frac{1}{n!} \sum_{v \in V(G)} |\{\phi \in S(G) \mid v \in J_\phi\}| \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.1.3}}{\geq} \frac{1}{n!} \sum_{v \in V(G)} \left| \bigcup_{H \in \mathcal{H}(v)} T(v, H) \right| \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.1.4}}{=} \frac{1}{n!} \sum_{v \in V(G)} \sum_{v \in V(G)} |T(v, H)| \end{aligned}$$

gilt.

Wir müssen nun  $|T(v, H)|$  bestimmen. Dazu konstruieren wir die Menge  $T(v, H)$  zu beliebig gegebenem  $H \in \mathcal{H}(v)$ .

Sei eine Nummerierung  $\phi \in T(v, H)$  gegeben, dann ist  $H$  ein  $(v, \phi)$ -zulässiger Graph und mit [Definition 2, a\)](#) gilt, dass  $N_{q+1,H}(v) \subseteq L_\phi(w)$  für alle  $w \in N_{q,H}(v)$  und alle  $q = 0, \dots, p-1$  ist. Somit existiert  $(\pi_0, \dots, \pi_p) \in \Pi(0, H) \times \dots \times \Pi(p, H)$  derart, dass das dazugehörige Tupel  $(u_1, u_2, \dots, u_{n_H})$  der Ecken aus  $V(H)$  auch entsprechend  $\phi$  geordnet sind, das heißt

$$u_i \in L_\phi(u_{i+1}) \text{ für } i = 0, \dots, n_H - 1. \quad (3.5)$$

Umgekehrt gibt es zu verschiedenen  $\pi, \pi' \in \Pi(0, H) \times \cdots \times \Pi(p, H)$ ,  $\pi \neq \pi'$  kein  $\phi \in S(G)$ , so dass die verschiedenen Tupel  $(u_1, \dots, u_{n_H})$  und  $(u'_1, \dots, u'_{n_H})$  die Bedingung (3.5) erfüllen. Wir geben uns somit  $(\pi_0, \dots, \pi_p) \in \Pi(0, H) \times \cdots \times \Pi(p, H)$  vor und zählen alle  $\phi \in S(G)$ , die (3.5) erfüllen und für die  $H$  ein  $(v, \phi)$ -verträglicher  $v$ -Graph ist.

Sei also  $\phi \in S(G)$  eine solche Nummerierung mit eben genannten Eigenschaften. Wir definieren  $A_1 := N_G[V(H)]$  und  $A_s := N_G[\{u_s, \dots, u_{n_H}\}] \setminus \{u_1, \dots, u_{s-1}\}$  für  $s = 2, \dots, n_H$ . Diese Mengen erfüllen  $a_s = |A_s|$ .

Es folgt

$$\begin{aligned} X_1 &:= \{\phi(u) \mid u \in A_1\} \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ \phi(u_1) &:= \min(X_1), \\ X_2 &:= \{\phi(u) \mid u \in A_2\} \subseteq X_1 \setminus \{\min(X_1)\}, \\ \phi(u_2) &:= \min(X_2), \\ &\vdots \\ X_{n_H} &:= \{\phi(u) \mid u \in A_{n_H}\} \subseteq X_{n_H-1} \setminus \{\min(X_{n_H-1})\}, \\ \phi(u_{n_H}) &:= \min(X_{n_H}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Z_1 &:= \{\phi(u) \mid u \in A_1 \setminus (A_2 \cup \{u_1\})\} = X_1 \setminus (X_2 \cup \{\min(X_1)\}), \\ Z_2 &:= \{\phi(u) \mid u \in A_2 \setminus (A_3 \cup \{u_2\})\} = X_2 \setminus (X_3 \cup \{\min(X_2)\}), \\ &\vdots \\ Z_{n_H} &:= \{\phi(u) \mid u \in A_{n_H} \setminus \{u_{n_H}\}\} = X_{n_H} \setminus \{\min(X_{n_H})\}. \end{aligned}$$

Für die Mengen  $X_1, \dots, X_{n_H}$  gibt es  $\binom{n}{a_1} \cdot \binom{a_1-1}{a_2} \cdot \dots \cdot \binom{a_{n_H-1}-1}{a_{n_H}}$  Möglichkeiten, diese zu wählen.

Für die Zuordnung der Nummern der Mengen  $Z_1, \dots, Z_{n_H}$  zu den entsprechenden Ecken erhalten wir  $(a_1 - a_2 - 1)! \cdot \dots \cdot (a_{n_H-1} - a_{n_H} - 1)! \cdot (a_{n_H} - 1)!$  Möglichkeiten.

Es verbleiben noch  $(n - a_1)!$  Möglichkeiten, die restlichen Ecken zu nummerieren.

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} &\binom{n}{a_1} \cdot \binom{a_1-1}{a_2} \cdot \dots \cdot \binom{a_{n_H}-1}{a_{n_H}} \\ &\quad \cdot (a_1 - a_2 - 1)! \cdot \dots \cdot (a_{n_H-1} - a_{n_H} - 1)! \cdot (a_{n_H} - 1)! \cdot (n - a_1)! \\ &= \frac{n!}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n_H}}. \end{aligned}$$

Bildet man die Summe über alle  $(\pi_0, \dots, \pi_p) \in \Pi(0, H) \times \cdots \times \Pi(p, H)$ , erhält man  $|T(v, H)|$ ; womit der Beweis abgeschlossen ist. ■

## 3.2 Algorithmen

Im Folgenden wollen wir ein weiteres Mal Algorithmus 2 betrachten.

Sei ein Graph  $G = (V, E)$  gegeben, dann interessieren wir uns für eine unabhängige Menge mindestens der Größe, die mit (★) aus Theorem 1 ermittelt werden kann. Der nicht-deterministische Algorithmus 3 wählt zu der Eingabe  $G$  eine zufällige Nummerierung und führt dann Algorithmus 2 durch.

---

### Algorithmus 3 : Nicht-deterministischer Algorithmus für eine unabhängige Menge

---

**Eingabe :** Einen Graphen  $G = (V, E)$ .

**Ausgabe :** Eine unabhängige Menge  $J_\phi$ .

- 1 Wähle zufällig eine Nummerierung  $\phi \in S(G)$ .
  - 2 Führe Algorithmus 2 mit  $G$  und  $\phi$  aus.
- 

Wir wissen aus Abschnitt 3.1, dass der Algorithmus 3 eine unabhängige Menge ausgibt, deren Größe im Mittel den gewünschten Wert hat; allerdings kann in schlechten Fällen eine unabhängige Menge mit weniger Ecken herauskommen.

Es stellt sich die Frage, ob es einen Algorithmus gibt, bei dem jede Ausgabe die gewünschte Größe besitzt. Die Problematik, den Zufall aus den Algorithmen zu entfernen beziehungsweise zumindest zu reduzieren, ist ein weitreichendes Thema, welches unter dem Begriff *Derandomisierung* von Algorithmen zu finden ist. Hierauf soll jedoch nicht weiter eingegangen werden; der Leser sei auf spezielle Literatur hierzu verwiesen [AS04, Kapitel 15].

Betrachtet man die Algorithmen 1 und 2, so ist nicht unmittelbar zu erkennen, dass die Menge  $J_\phi$  aus Algorithmus 2 die Menge  $I_\phi$  aus Algorithmus 1 umfasst. Formuliert man Algorithmus 2 etwas um, so ist leicht zu sehen, dass er im Prinzip Algorithmus 1 mehrfach ausführt und dabei in jeder Iteration die Menge  $I_\phi$  mit ihrer Nachbarschaft entfernt. Dies wird durch Algorithmus 4 verdeutlicht.

---

### Algorithmus 4 : Alternativer Algorithmus zu Theorem 1

---

**Eingabe :** Einen Graphen  $G = (V, E)$  und eine Nummerierung  $\phi$  auf  $G$ .

**Ausgabe :** Eine unabhängige Menge  $J_\phi$ .

- 1  $J \leftarrow \emptyset$ ;
  - 2  $H \leftarrow G$ ;
  - 3 **solange**  $V(H) \neq \emptyset$  **tue**
  - 4      $I \leftarrow \emptyset$ ;
  - 5     **für alle** *Ecke*  $v \in V(H)$  **tue**
  - 6         **wenn**  $N_H(v) \cap L_\phi(v) = \emptyset$  **dann**
  - 7              $I \leftarrow I \cup \{v\}$ ;
  - 8         **Ende**
  - 9     **Ende**
  - 10     $J \leftarrow J \cup I$ ;
  - 11     $H \leftarrow H \setminus N_G[I]$ ;
  - 12 **Ende**
-

Wie zu sehen ist, entsprechen die Zeilen 4 bis 9 genau Algorithmus 1. Danach wird in Zeile 10 die unabhängige Menge  $I$  zu  $J$  hinzugefügt und in Zeile 11 werden die Ecken  $I$  mit ihren Nachbarn aus dem Graphen entfernt. Auf dem verbliebenen Graphen wird erneut Algorithmus 1 durchgeführt. Die hierbei gewonnene unabhängige Menge  $I$  lässt sich mit der gespeicherten unabhängigen Menge  $J$  zu einer größeren unabhängigen Menge vereinigen. Im Anschluss werden wiederum die verarbeiteten Ecken entfernt und von vorne begonnen.

Es stellt sich die Frage, ob diese Idee den Algorithmus 1 der Caro-Wei-Schranke mehrfach nacheinander durchzuführen, bereits in der Literatur untersucht wurde. Ein mehrfaches Durchlaufen bis der komplette Graph abgearbeitet wurde (Algorithmus 4), ist uns nicht bekannt; die Einschränkung auf genau zwei Durchläufe wurde dagegen beispielsweise durch S. M. Selkow in [Sel94] vorgestellt. Die dazugehörige Schranke ist bereits in Proposition 1.1.4 erwähnt worden, im nächsten Kapitel werden wir sie genauer betrachten.

# 4 Über die Schranke von S. M. Selkow

Nachdem wir in Abschnitt 2.4 bereits die neuen Schranken mit gängigen Caro-Wei-ähnlichen unteren Schranken verglichen haben, soll unser Resultat im Folgenden nun der klassischen Schranke von S. M. Selkow aus Proposition 1.1.4 gegenübergestellt werden. Hierbei werden wir sehen, dass zum Beweis der Schranke in [Sel94] ein Algorithmus formuliert wurde, der im Prinzip Algorithmus 4 mit genau zwei Durchläufen entspricht. Trotzdem scheint diese Schranke nur schwer mit den Resultaten aus Kapitel 2 vergleichbar zu sein, da S. M. Selkow die erwartete Ausgabegröße des Algorithmus auf andere Weise abschätzt. Deshalb ist es von Interesse, sich diese Arbeit und den Beweis aus [Sel94] genauer anzuschauen. Hierbei wird uns ein Fehler in der Beweisführung begegnen. Im darauffolgenden Abschnitt 4.2 werden einige weitere Überlegungen hinsichtlich der Belastbarkeit des Resultats aufgeführt.

## 4.1 Die Schranke

Wir formulieren erneut den Satz von S. M. Selkow.

### Proposition 4.1.1 (S. M. Selkow)

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann gilt

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \left( \frac{1}{d_G(v) + 1} \left( 1 + \max \left\{ \frac{d_G(v)}{d_G(v) + 1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1}, 0 \right\} \right) \right). \quad (4.1)$$

BEWEIS: Wir folgen nun dem Beweis von S. M. Selkow zu Proposition 4.1.1 aus der Originalliteratur [Sel94].

Es sei  $G = (V, E)$  ein beliebiger Graph. Hierauf ist  $\phi \in S(G)$  eine zufällig gewählte Nummerierung, wobei für die zufällige Wahl von einer uniformen Verteilung der Elemente aus  $S(G)$  ausgegangen wird. Für dieses  $\phi$  ist  $I_1$  die durch Algorithmus 1 erzeugte Ausgabe, also

$$I_1 := \{v \in V(G) \mid N_G(v) \subseteq R_\phi(v)\}.$$

Wie schon im Beweis von Proposition 1.1.1 in Kapitel 3 gilt hier

$$\mathbf{E}(|I_1|) = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d_G(v) + 1}.$$

Die Menge  $S$  sei die Menge der Ecken abzüglich derer aus  $I_1$ , die Algorithmus 4 im ersten Durchlauf der Schleife in Zeile 3 bis 12 herausnimmt. Dies ist genau die Menge der Ecken, die adjazent zu einer Ecke aus  $I_1$  sind:

$$S := \{v \in V(G) \mid \exists u \in I_1 : uv \in E(G)\}.$$



Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ecke  $v \in V(G)$  sich in der Menge  $S$  befindet, lässt sich wie folgt abschätzen:

$$\mathbf{P}(v \in S) = \mathbf{P}(\exists u \in N_G(v) : u \in I_1) \leq \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1}. \quad (4.2)$$

Sei  $H = G[V(G) - I_1 - S]$  der von  $V(G) - I_1 - S$  induzierte Untergraph von  $G$ , also der Graph  $H$  im ersten Durchlauf der Schleife des Algorithmus 4. Für alle Ecken  $v \in V(G)$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(v \in V(H)) &= 1 - \mathbf{P}(v \in I_1) - \mathbf{P}(v \in S) \\ &\geq 1 - \frac{1}{d_G(v) + 1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1}. \end{aligned}$$

Ist  $V(H)$  nicht leer, so kann ein weiterer Durchlauf der Schleife in Zeile 3 bis 12 durchgeführt werden. Hierbei ergibt sich auf gleiche Weise die Menge

$$I_2 := \{v \in V(H) \mid N_H(v) \subseteq R_\phi(v)\}.$$

Trivialerweise sind die Mengen  $I_1$  und  $I_2$  disjunkt und jeweils unabhängig und können somit eine unabhängige Menge  $I_1 \cup I_2$  bilden. Folglich gilt für  $\alpha(G)$ :

$$\begin{aligned} \alpha(G) &\geq \mathbf{E}(|I_1 \cup I_2|) \\ &= \mathbf{E}(|I_1|) + \mathbf{E}(|I_2|) \\ &= \sum_{v \in V(G)} (\mathbf{P}(v \in I_1) + \mathbf{P}(v \in I_2)). \end{aligned}$$

Es bleibt  $\mathbf{P}(v \in I_2)$  zu bestimmen. Hierbei schreibt S. M. Selkow [Sel94, S. 364] (der Leser betrachte dazu die entsprechende Seite aus der Veröffentlichung auf der nächsten Seite):

$$\mathbf{P}(v \in I_2) = \mathbf{P}(v \in I_2 \mid v \in V(H)) \mathbf{P}(v \in V(H)) \quad (4.3)$$

$$\geq \left( \frac{1}{d_H(v) + 1} \right) \left( 1 - \frac{1}{d_G(v) + 1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1} \right) \quad (4.4)$$

$$\geq \left( \frac{1}{d_G(v) + 1} \right) \left( \frac{d_G(v)}{d_G(v) + 1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1} \right). \quad (4.5)$$

364

S.M. Selkow / Discrete Mathematics 132 (1994) 363–365

Let  $X_v$  be the indicator variable for  $v \in I_1$ . By the linearity of expectation,

$$E[|I_1|] = \sum_{v \in V(G)} E[X_v] = \sum_{v \in V(G)} \Pr\{v \in I_1\} = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d_G(v) + 1}.$$

We define  $S = \{v \in V(G) : (\exists w)(w \in I_1 \wedge \{v, w\} \in E(G))\}$ , i.e.,  $S$  is the set of vertices adjacent to a vertex of  $I_1$ .

$$\begin{aligned} \Pr\{v \in S\} &= \Pr\{(\exists w \in \Gamma_G(v))(w \in I_1)\} \\ &\leq \sum_{w \in \Gamma_G(v)} \frac{1}{d_G(w) + 1}. \end{aligned}$$

Let  $H$  be the subgraph of  $G$  induced by  $V(G) - I_1 - S$ , i.e.,  $H$  is obtained from  $G$  by removing  $I_1 \cup S$  and all incident edges. For all  $v \in V(G)$ ,

$$\begin{aligned} \Pr\{v \in V(H)\} &= 1 - \Pr\{v \in I_1\} - \Pr\{v \in S\} \\ &\geq 1 - \frac{1}{d_G(v) + 1} - \sum_{w \in \Gamma_G(v)} \frac{1}{d_G(w) + 1}. \end{aligned}$$

If  $V(H)$  is not empty, we can extract an independent set of vertices by defining  $I_2 = \{v \in V(H) : \{v, w\} \in E(H) \Rightarrow v < w\}$ .

Let  $Y_v$  be the indicator variable for  $v \in I_2$ . For each  $v$ ,

$$\begin{aligned} E[Y_v] &= \Pr\{v \in I_2\} \\ &= \Pr\{v \in I_2 \mid v \in H\} \Pr\{v \in V(H)\} \\ &\geq \left(\frac{1}{d_H(v) + 1}\right) \left(1 - \frac{1}{d_G(v) + 1} - \sum_{w \in \Gamma_G(v)} \frac{1}{d_G(w) + 1}\right) \\ &\geq \left(\frac{1}{d_G(v) + 1}\right) \left(\frac{d_G(v)}{d_G(v) + 1} - \sum_{w \in \Gamma_G(v)} \frac{1}{d_G(w) + 1}\right). \end{aligned}$$

If  $x, y \in I_1$  or  $x, y \in I_2$ , then they cannot be adjacent, so  $I_1$  and  $I_2$  must be independent. If  $x \in I_1$  then every vertex adjacent to  $x$  belongs to  $S$  and cannot belong to  $I_2$ , so  $I_1 \cup I_2$  must be independent. Since  $<$  was a uniformly chosen total ordering, there must be some total ordering yielding an independent set of at least this size.  $\square$

The Caro–Wei bound is tight if and only if all the components of the graph are complete. The above bound is equal to the Caro–Wei bound for regular graphs, and is

Ein Blick auf die Formeln (4.3)–(4.5) und den Beweis lässt vermuten, dass der Autor

$$\mathbf{P}(v \in I_2 \mid v \in V(H)) \geq \frac{1}{d_G(v) + 1}$$

für jeden Graphen  $G$  annimmt. Jedenfalls behauptet und benutzt er, dass im Allgemeinen

$$\mathbf{P}(v \in I_2) \geq \left( \frac{1}{d_G(v) + 1} \right) \left( \frac{d_G(v)}{d_G(v) + 1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1} \right)$$

gilt, wie es auf der vorherigen Seite mit grün hervorgehoben ist. Dies ist jedoch falsch, denn es gilt folgendes Lemma:

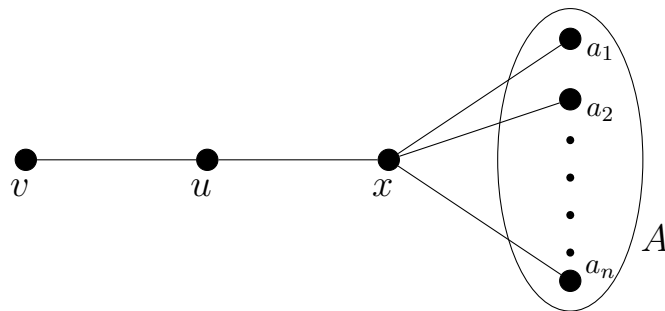
**Lemma 4.1.2**

Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein Graph  $G$  und eine Ecke  $v \in V(G)$  derart, dass

$$0 < \mathbf{P}(v \in I_2) < \varepsilon \cdot \left( \frac{1}{d_G(v) + 1} \right) \left( \frac{d_G(v)}{d_G(v) + 1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1} \right)$$

gilt.

BEWEIS: Sei im Folgenden  $G$  der Graph entsprechend der Skizze.



Wir betrachten die Ecke  $v \in V(G)$ . Im Folgenden werden wir die Größen  $\mathbf{P}(v \in V(H))$  und  $\mathbf{P}(v \in I_2)$  bestimmen.

$$\mathbf{P}(v \in V(H)) = 1 - \mathbf{P}(v \in I_1) - \mathbf{P}(v \in S) = 1 - \mathbf{P}(v \in I_1) - \mathbf{P}(u \in I_1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Es sei ein  $\phi \in S(G)$  gegeben, so dass  $v \in I_2$  gilt. Wir werden im Folgenden Bedingungen an  $\phi$  stellen, die äquivalent zu  $v \in I_2$  sind. Die Ecke  $v$  darf sich nicht in der Menge  $I_1$  befinden, daher muss  $u \in L_\phi(v)$  gelten. Es gilt  $v \in I_2$  genau dann, wenn  $u \in S$  gilt. Somit muss aber  $x \in I_1$  gelten. Fassen wir diese Bedingungen an  $\phi$  zusammen, so gilt:

$$\phi(x) < \phi(u) < \phi(v)$$

und

$$\phi(x) < \phi(a_i) \text{ für alle } i = 1, \dots, n.$$

Also ist  $\phi(x) = 1$ , aus den restlichen Nummern  $2, \dots, n+3$  wählen wir für  $\phi(u)$  und  $\phi(v)$  zwei aus. Die Nummern der Ecken aus  $A$  sind hierbei irrelevant. Damit haben wir

$$1 \cdot \binom{n+2}{2} \cdot n!$$

günstige Nummerierungen gefunden. Somit ist

$$\mathbf{P}(v \in I_2) = \frac{1 \cdot \binom{n+2}{2} \cdot n!}{(n+3)!} = \frac{(n+2)!}{2! \cdot (n+3)!} = \frac{1}{2 \cdot (n+3)}.$$

Für beliebiges  $n \geq 6/\varepsilon$  ergibt sich

$$\frac{\mathbf{P}(v \in I_2)}{\left(\frac{1}{d_G(v)+1}\right) \left(\frac{d_G(v)}{d_G(v)+1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u)+1}\right)} = \frac{\frac{1}{2 \cdot (n+3)}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{6}{n+3} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Für  $\varepsilon = 1$  zeigt [Lemma 4.1.2](#), dass der Beweis von S. M. Selkow falsch ist. Jedoch würde es reichen

$$\sum_{v \in V(G)} \mathbf{P}(v \in I_2) \geq \sum_{v \in V(G)} \left( \frac{1}{d_G(v)+1} \cdot \max \left\{ \frac{d_G(v)}{d_G(v)+1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u)+1}, 0 \right\} \right)$$

zu zeigen, um den Beweis abzuschließen. Dieser Fragestellung werden wir im nächsten Abschnitt begegnen.

## 4.2 Bemerkungen zu einem möglichen Beweis der Schranke

In diesem Abschnitt stellen wir einige Bemerkungen an, welche für die Richtigkeit der Behauptung von [Proposition 4.1.1](#) sprechen. Es gibt aber auch Überlegungen, die ein Gegenbeispiel möglich erscheinen lassen. Ein Beweis beziehungsweise ein Gegenbeispiel konnten wir jedoch bisher nicht finden. Des Weiteren sind uns auch keine Resultate dazu aus der Literatur bekannt.

Zum Beweis von [Proposition 4.1.1](#) bleibt noch

$$\sum_{v \in V(G)} \mathbf{P}(v \in I_2) \geq \sum_{v \in V(G)} \left( \frac{1}{d_G(v)+1} \cdot \max \left\{ \frac{d_G(v)}{d_G(v)+1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u)+1}, 0 \right\} \right) \quad (4.6)$$

zu zeigen. Aus [Lemma 4.1.2](#) ist bekannt, dass diese Aussage summandenweise falsch ist, das heißt, dass im Allgemeinen nicht

$$\mathbf{P}(v \in I_2) \geq \left( \frac{1}{d_G(v)+1} \right) \left( \frac{d_G(v)}{d_G(v)+1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u)+1} \right) \quad (4.7)$$

gilt.

Es kann also Ecken im Graphen  $G$  geben, die die Ungleichung (4.7) nicht erfüllen. Solche Ecken nennen wir aus diesem Grund *schlecht*. Wir werden zeigen, dass es auch Ecken gibt, die die

Ungleichung (4.7) mit einem Faktor größer 1 erfüllen. Solche Ecken bezeichnen wir mit *gut*. Diese Eigenschaften sind im folgenden Lemma 4.2.1 zu finden.

**Lemma 4.2.1**

a) Für einen nicht-vollständigen Graphen  $G$  und jede Ecke  $v \in V(G)$  mit  $N_G[v] \neq V(G)$  gelten für  $\mathbf{P}(v \in I_2)$  die trivialen Schranken

$$0 < \mathbf{P}(v \in I_2) \leq 1 - \frac{1}{d_G(v) + 1} - \max_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1}.$$

b) Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es einen nicht-vollständigen Graphen  $G$  und eine Ecke  $v \in V(G)$  derart, dass

$$\mathbf{P}(v \in I_2) < \varepsilon \cdot \left( \frac{1}{d_G(v) + 1} \right) \left( \frac{d_G(v)}{d_G(v) + 1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1} \right).$$

Solche Ecken widersprechen der Ungleichung (4.7) und werden mit *schlecht* bezeichnet.

c) Für  $c > 1$  gibt es einen nicht-vollständigen Graphen  $G$  und eine Ecke  $v \in V(G)$  derart, dass

$$\mathbf{P}(v \in I_2) > c \cdot \left( \frac{1}{d_G(v) + 1} \right) \left( \frac{d_G(v)}{d_G(v) + 1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1} \right).$$

Ecken, die diese Bedingung erfüllen, nennen wir *gut*.

BEWEIS: Für einen Graphen  $G = (V, E)$  sei  $v \in V(G)$  eine Ecke mit  $N_G[v] = V(G)$ . Ist  $v$  in einer unabhängigen Menge, so kann diese Menge nur die Ecke  $v$  enthalten. In jeder anderen unabhängigen Menge kann sich  $v$  nicht befinden.

a) Es sei  $G = (V, E)$  ein nicht-vollständiger Graph und  $v \in V(G)$  eine beliebige Ecke mit  $N_G[v] \neq V(G)$ . Dann gibt es zwei Ecken  $u, w \in V(G)$  mit  $vu, uw \in E(G)$  und  $vw \notin E(G)$ . Sei  $\phi \in S(G)$  eine Nummerierung mit  $1 = \phi(w)$ ,  $2 = \phi(u)$  und  $3 = \phi(v)$ . Für diese Nummerierung ist  $w \in I_1$ ,  $u \in S$  und  $v \in I_2$ . Somit ist  $\mathbf{P}(v \in I_2) > 0$ .

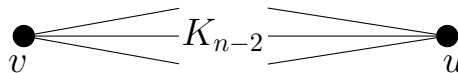
Es ist bekannt, wie  $\mathbf{P}(v \in V(H))$  berechnet werden kann. Es gilt

$$\mathbf{P}(v \in I_2) \leq \mathbf{P}(v \in V(H)) = 1 - \mathbf{P}(v \in I_1) - \mathbf{P}(v \in S) \leq 1 - \frac{1}{d_G(v) + 1} - \frac{1}{d_G(u) + 1}$$

für beliebiges  $u \in N_G(v)$ .

b) Das folgt direkt aus Lemma 4.1.2.

c) Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl mit  $n \geq c + 2$  und  $K_n$  der vollständige Graph mit  $n$  Ecken. Wir wählen zwei Ecken  $u, v \in V(K_n)$  und entfernen die Kante  $uv$ .



Für den hierbei erhaltenen Graphen  $G = (V(K_n), E(K_n) \setminus \{uv\})$  berechnen wir getrennt  $\mathbf{P}(v \in I_2)$  und die rechte Seite

$$R(v) = \left( \frac{1}{d_G(v) + 1} \right) \left( \frac{d_G(v)}{d_G(v) + 1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1} \right).$$

Es sei ein  $\phi \in S(G)$  gegeben, so dass  $v \in I_2$  gilt. Jede Ecke aus  $N_G[v] = V(G) \setminus \{u\}$  kann folglich nicht in der Menge  $I_1$  enthalten sein, so dass  $u \in I_1$  gelten muss und die Menge  $S = V(G) \setminus \{u, v\}$  ist. Damit  $v \in I_2$  gilt, muss es einen Nachbarn  $a \in N_G(v)$  geben mit  $a \in L_\phi(v)$ . Fassen wir diese Bedingungen an  $\phi$  zusammen, so gilt  $1 = \phi(u)$  und  $2 = \phi(a)$ . Die Nummern der restlichen Ecken sind hierbei irrelevant. Wir haben

$$1 \cdot (n-2) \cdot (n-2)!$$

günstige Nummerierungen gefunden und es gilt

$$\mathbf{P}(v \in I_2) = \frac{1 \cdot (n-2) \cdot (n-2)!}{n!} = \frac{n-2}{n \cdot (n-1)}.$$

Berechnen wir die rechte Seite der Ungleichung:

$$\begin{aligned} R(v) &= \left( \frac{1}{d_G(v) + 1} \right) \left( \frac{d_G(v)}{d_G(v) + 1} - \sum_{u \in N_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1} \right) \\ &= \left( \frac{1}{n-1} \right) \left( \frac{n-2}{n-1} - \frac{n-2}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-2}{n \cdot (n-1)}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\mathbf{P}(v \in I_2) = (n-1) \cdot R(v) > c \cdot R(v). \quad \blacksquare$$

Das [Lemma 4.2.1](#) zeigt, dass es gute und schlechte Ecken geben kann. Wenn für jeden Graphen die guten Ecken die schlechten überwiegen in dem Sinne, dass die Ungleichung (4.6) gilt, so wäre [Proposition 4.1.1](#) richtig. Der Beweis für das Überwiegen der guten Ecken ist uns bisher nicht gelungen.

Wir möchten noch eine kurze Überlegung vorstellen, die möglicherweise gegen die Richtigkeit von [Proposition 4.1.1](#) sprechen könnte. Dazu sei  $G$  der Graph bestehend aus zwei kompletten Graphen  $K_n$ , die über je eine Ecke miteinander verbunden sind. Betrachten wir dazu die folgende Abbildung.



Die Caro-Wei-Schranke ergibt

$$CW(G) = \frac{2}{n+1} + \frac{2n-2}{n}.$$

Berechnen wir die Schranke (4.1):

$$\begin{aligned}
 \alpha(G) &\geq CW(G) + \frac{2}{n+1} \cdot 0 + \frac{2n-2}{n} \cdot \left( \frac{n-1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{n-2}{n} \right) \\
 &= \frac{2}{n+1} + \frac{2n-2}{n} + \frac{2n-2}{n} \cdot \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\
 &= \frac{2n^2 + (2n-2) \cdot n \cdot (n+1) + (2n-2)}{n^2 \cdot (n+1)} \\
 &= \frac{2n^3 + 2n^2 - 2}{n^3 + n^2}.
 \end{aligned}$$

Diese Formel erreicht für alle  $n$  die Unabhängigkeitszahl  $\alpha(G) = 2$  nicht. Die Konstruktion eines Graphen, bei dem die Schranke aus Proposition 4.1.1 den tatsächlichen Wert  $\alpha(G)$  übersteigt, ist bisher nicht gelungen. Daher bleibt in dieser Arbeit offen, ob das Resultat von S. M. Selkow gilt.

Kapitel 1 dieser Arbeit bietet einen gewiss nicht vollständigen Überblick über verschiedene untere Schranken für die Unabhängigkeitszahl  $\alpha(G)$  an, die allesamt Verbesserungen der Caro-Wei-Schranke  $CW(G)$  sind. In Kapitel 2 wurde eine allgemeine neue Schranke eingeführt, die Ausgangspunkt für weitere Betrachtungen war. So konnten wir einfachere und leicht berechenbare Schranken ableiten und diese bewerten. Unter anderem schränkten wir die Menge der  $v$ -Graphen  $\mathcal{H}(v)$  auf Wege der Länge zwei ein. Einen solchen Weg  $P = (v, u, w) \in \mathcal{H}(v)$  untersuchten wir ausgehend von der Endecke  $v$ .

Betrachten wir solche Wege  $P = (v, u, w)$  von dem „Mittelpunkt“  $u$  aus, so ist die Nichtkante zwischen  $v$  und  $w$  eine fehlende Kante in der Nachbarschaft  $N_G[u]$  von  $u$ . Mit Hilfe des Satzes von Turán werden wir die Anzahl fehlender Kanten abschätzen können. Bei dieser Abschätzung wird der Parameter  $\omega_G(u)$  auftreten und damit, wie wir in Kapitel 6 noch sehen werden, kann unser Resultat (Theorem 1) genutzt werden, um sich der Vermutung 1.1.3 von E. Bertram und P. Horak „anzunähern“. Dazu werden wir zunächst in Kapitel 5 leichte Variationen von Theorem 1 betrachten.





**Korollar 5.1.1**

$$\alpha(G) \geq CW(G) + \sum_{v \in V(G)} \sum_{\substack{u \in V(G), \\ uv \notin E(G), \\ N_G(u,v) \neq \emptyset}} \sum_{\substack{S \subseteq N_G(u,v), \\ S \neq \emptyset}} \sum_{\pi \in \Pi(S)} \frac{1}{a \cdot b_1(\pi) \cdot \dots \cdot b_s(\pi) \cdot c},$$

wobei  $\pi \in \Pi(S)$  eine Anordnung von  $S$  zu einem Tupel  $(w_1, w_2, \dots, w_s)$  mit  $s := |S|$  ist und  $a := |N_G[S \cup \{u, v\}]|$ ,  $b_1(\pi) := |N_G[S \cup \{v\}] \setminus \{u\}|$ ,  
 $b_i(\pi) := |N_G[\{w_i, \dots, w_s, v\}] \setminus \{u, w_1, \dots, w_{i-1}\}|$  für  $i = 2, \dots, s$  und  $c := d_G(v) + 1 - s$ .

Es reicht in diesem Fall jedoch, dass  $H$  ein  $(v, \phi)$ -zulässiger  $v$ -Graph ist. Wir müssen lediglich fordern, dass  $\bigcap_{x \in S} N_G(x) \subseteq R_\phi(w)$  für alle  $w \in S$  ist.

**Proposition 5.1.2**

$$\alpha(G) \geq CW(G) + \sum_{v \in V(G)} \sum_{\substack{u \in V(G), \\ uv \notin E(G), \\ N_G(u,v) \neq \emptyset}} \sum_{\substack{S \subseteq N_G(u,v), \\ S \neq \emptyset}} \frac{s!}{a \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_s \cdot c},$$

mit  $s := |S|$ ,  $a := |N_G[\{u, v\}] \cup \bigcap_{w \in S} N_G(w)|$ ,  $b_i := |N_G[v] \cup \bigcap_{w \in S} N_G(w)| - i$  für  $i = 1, \dots, s$   
und  $c := d_G(v) + 1 - s$ .

**BEWEIS:** Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von [Theorem 1](#). Deshalb wird er nur verkürzt aufgeführt.

Wir wollen eine gewisse Teilmenge von  $S(G)$  derart konstruieren, dass  $v \in J_\phi$  ist. Sofern  $N_G(v) \cap L_\phi(v) = \emptyset$  gilt, ist  $p(H) = 0$ , das heißt wir erhalten den Summanden  $\frac{1}{d_G(v)+1}$ , dessen Summe über  $V(G)$  die Caro-Wei-Schranke ergibt.

Falls die Situation wie im Bild zu Beginn dieses Abschnitts eintritt, wählen wir  $u \in V(G)$  mit  $uv \notin E(G)$  und  $N_G(u, v) \neq \emptyset$ . Es sei außerdem  $S \subseteq N_G(u, v)$  nichtleer. Für alle  $\phi \in S(G)$ , so dass  $H$  ein  $(v, \phi)$ -zulässiger  $v$ -Graph ist, gilt nach [Lemma 3.1.3](#), dass  $v \in J_\phi$  ist. Sei  $\phi \in S(G)$  eine solche Nummerierung.

Wir definieren die Mengen  $A := N_G[\{u, v\}] \cup \bigcap_{w \in S} N_G(w)$ ,  $B := N_G[v] \cup \bigcap_{w \in S} N_G(w) \setminus \{u\}$  und  $C := N_G[v] \setminus S$ , die  $a = |A|$ ,  $b_1 = |B|$  und  $c = |C|$  erfüllen.

Es folgt

$$\begin{aligned}
X_1 &:= \{\phi(x) \mid x \in A\} \subseteq \{1, \dots, n\}, \\
\phi(u) &:= \min(X_1), \\
X_2 &:= \{\phi(x) \mid x \in B\} \subseteq X_1 \setminus \{\min(X_1)\}, \\
Y &:= \{\phi(x) \mid x \in S\} = \{i \in X_2 \mid i \text{ ist die kleinste bis } s\text{-kleinste Zahl aus } X_2\}, \\
X_3 &:= \{\phi(x) \mid x \in C\} \subseteq X_2 \setminus Y, \\
\phi(v) &:= \min(X_3)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
Z_1 &:= \{\phi(x) \mid x \in A \setminus (B \cup \{u\})\} = X_1 \setminus (X_2 \cup \{\min(X_1)\}), \\
Z_2 &:= \{\phi(x) \mid x \in B \setminus (C \cup S)\} = X_2 \setminus (X_3 \cup Y), \\
Z_3 &:= \{\phi(x) \mid x \in C \setminus \{v\}\} = X_3 \setminus \{\min(X_3)\}.
\end{aligned}$$

Für die Mengen  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  gibt es  $\binom{n}{a} \cdot \binom{a-1}{b_1} \cdot \binom{b_1-s}{c}$  Möglichkeiten, diese zu wählen; den Faktor  $s!$  erhält man für  $Y$ .

Für die Zuordnung der Mengen  $Z_1, Z_2, Z_3$  erhalten wir  $(a - b_1 - 1)! \cdot (b_1 - c - s)! \cdot (c - 1)!$  Möglichkeiten.

Es verbleiben noch  $(n - a)!$  Möglichkeiten die restlichen Ecken zu nummerieren.

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{a} \cdot \binom{a-1}{b_1} \cdot \binom{b_1-s}{c} \cdot s! \cdot (a - b_1 - 1)! \cdot (b_1 - c - s)! \cdot (c - 1)! \cdot (n - a)! \\
&= \frac{n! \cdot s! \cdot (b_1 - s)!}{a \cdot c \cdot b_1!}.
\end{aligned}$$

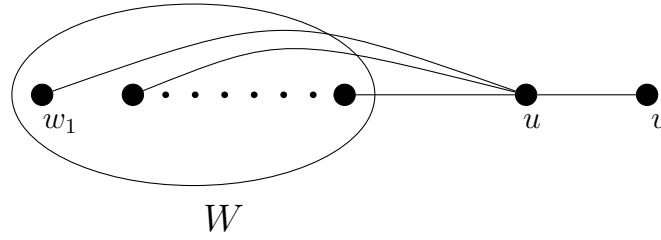
Bildet man die Summe über alle  $u$  und  $S$ , erhält man die behauptete Schranke.

Bis jetzt haben wir mögliche Mehrfachzählungen der Nummerierungen nicht beachtet, es verbleibt daher der Nachweis, dass wir kein  $\phi \in S(G)$  mehrmals zählen. Zu gegebenem  $\phi \in S(G)$  ist  $S = N_G(v) \cap L_\phi(v)$  und  $\{u\} = \bigcap_{w \in S} (N_G(w) \cap L_\phi(w))$  eindeutig bestimmt, für eine andere Wahl von  $u$  und  $S$  erhält man ein anderes  $\phi' \in S(G)$ . Mehrfachzählungen sind damit ausgeschlossen. ■

## 5.2 Alternative zur $(v, \phi)$ -Zulässigkeit

Es wurde gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen für alle  $w \in N_{1,H}(v)$  die Nummern  $\phi(x)$  für  $x \in N_G(w) \setminus N_H(w)$  beliebig sein können. In diesem Abschnitt untersuchen wir, inwiefern diese Eigenschaft für Ecken aus der Menge  $N_{2,H}(v)$  statt  $N_{1,H}(v)$  gelten könnte.

Es sei dazu eine beliebige Ecke  $u \in V(G)$ , eine Nummerierung  $\phi \in S(G)$  und eine Nachbar-ecke  $v \in N_G(u) \cap R_\phi(u)$  mit größerer Nummer gegeben. Wir betrachten die Situation, in der Algorithmus 2 die Ecke  $v$  in die Menge  $J_\phi$  aufnimmt.



Es muss mindestens einen Nachbarn  $w \in N_G(u)$  von  $u$  mit  $w \in L_\phi(u)$  geben, der nicht mit  $v$  adjazent ist. Wir nehmen daher im Folgenden an, dass  $N_G(u) \cap L_\phi(u) \cap N_G(v) = \emptyset$ , setzen  $W = N_G(u) \cap L_\phi(u)$  und nennen die Elemente  $w_1, \dots, w_s$  aus  $W$  entsprechend der gewählten Nummerierung  $\phi$ .

Aus [Theorem 1](#) folgt direkt eine Abschätzung für die Unabhängigkeitszahl in der oben vereinbarten Situation.

### Korollar 5.2.1

$$\alpha(G) \geq CW(G) + \sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in N_G(v)} \sum_{\substack{W \subseteq N_G(u), \\ W \cap N_G[v] = \emptyset, \\ W \neq \emptyset}} \sum_{\pi \in \Pi(W)} \frac{1}{a_1(\pi) \cdot \dots \cdot a_s(\pi) \cdot b \cdot c},$$

wobei  $\pi \in \Pi(W)$  eine Anordnung von  $W$  zu einem Tupel  $(w_1, w_2, \dots, w_s)$  mit  $s := |W|$  ist und  $a_1(\pi) := |N_G[W \cup \{u, v\}]|$ ,  $a_i(\pi) := |N_G[\{w_i, \dots, w_s, u, v\}] \setminus \{w_1, \dots, w_{i-1}\}|$  für  $i = 2, \dots, s$ ,  $b := |N_G[\{u, v\}] \setminus W|$  und  $c := d_G(v)$ .

Wegen [Definition 2, b\)](#) muss für alle  $w \in W$  gelten, dass  $N_G(w) \setminus W \subseteq R_\phi(w)$  ist. Dies führt zu der Größe der Faktoren im Nenner. Es reicht jedoch, wenn wir für ein  $w_i \in W$  fordern, dass alle anderen Nachbarn eine größere Nummer haben, das heißt  $N_G(w_i) \subseteq R_\phi(w_i)$ . Damit werden die Nenner kleiner und das vorige Korollar verbessert.

### Proposition 5.2.2

$$\alpha(G) \geq CW(G) + \sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in N_G(v)} \sum_{\substack{W \subseteq N_G(u), \\ W \cap N_G[v] = \emptyset, \\ W \neq \emptyset}} \sum_{w_1 \in W} \frac{(s-1)!}{a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{s-1} \cdot b \cdot c},$$

mit  $s := |W|$ ,  $a_0 := |N_G[\{w_1, u, v\}]|$ ,  $a_i := |N_G[\{u, v\}] \setminus W| + (s-i)$  für  $i = 1, \dots, s-1$ ,  $b := |N_G[\{u, v\}] \setminus W|$  und  $c := d_G(v)$ .

BEWEIS: Auch dieser Beweis verläuft analog zu dem von [Theorem 1](#) und wird deshalb nur verkürzt aufgeführt.

Wir wollen eine gewisse Teilmenge von  $S(G)$  derart konstruieren, dass  $v \in J_\phi$  ist. Für den Fall, dass  $N_G(v) \cap L_\phi(v) = \emptyset$  gilt, ist  $p(H) = 0$ , das heißt wir erhalten den Summanden  $\frac{1}{d_G(v)+1}$ , dessen Summe über  $V(G)$  die Caro-Wei-Schranke ergibt.

Falls die Situation wie im Bild zu Beginn dieses Abschnitts eintritt, wählen wir ein  $u \in N_G(v)$ , dann  $W \subseteq N_G(u)$  mit  $W \cap N_G[v] = \emptyset, W \neq \emptyset$  und ein  $w_1 \in W$ . Sei nun  $\phi \in S(G)$  eine Nummerierung mit

$$\phi(w_1) \leq \phi(w) \leq \phi(u) \leq \phi(v)$$

für alle  $w \in W \setminus \{w_1\}$ .

Wir definieren die Mengen  $A := N_G[\{w_1, u, v\}]$ ,  $B := N_G[\{u, v\}] \setminus W$  und  $C := N_G[v] \setminus \{u\}$ , die  $a_0 = |A|$ ,  $b = |B|$  und  $c = |C|$  erfüllen.

Es folgt

$$\begin{aligned} X_1 &:= \{\phi(x) \mid x \in A\} \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ \phi(w_1) &:= \min(X_1), \\ X_2 &:= \{\phi(x) \mid x \in N_G[\{u, v\}] \setminus \{w_1\}\} \subseteq X_1 \setminus \{\min(X_1)\}, \\ Y &:= \{\phi(x) \mid x \in W \setminus \{w_1\}\} = \{i \in X_2 \mid i \text{ ist die kleinste bis } (s-1)\text{-kleinste Zahl aus } X_2\}, \\ X_3 &:= \{\phi(x) \mid x \in B\} \subseteq X_2 \setminus Y, \\ \phi(u) &:= \min(X_3), \\ X_4 &:= \{\phi(x) \mid x \in C\} \subseteq X_3 \setminus \{\min(X_3)\}, \\ \phi(v) &:= \min(X_4) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Z_1 &:= \{\phi(x) \mid x \in A \setminus N_G[\{u, v\}]\} = X_1 \setminus (X_2 \cup \{\min(X_1)\}), \\ Z_3 &:= \{\phi(x) \mid x \in B \setminus (C \cup \{u\})\} = X_3 \setminus (X_4 \cup \{\min(X_3)\}), \\ Z_4 &:= \{\phi(x) \mid x \in C \setminus \{v\}\} = X_4 \setminus \{\min(X_4)\}. \end{aligned}$$

Für die Mengen  $X_1, \dots, X_4$  gibt es  $\binom{n}{a_0} \cdot \binom{a_0-1}{b+(s-1)} \cdot \binom{b}{b} \cdot \binom{b-1}{c}$  Möglichkeiten, diese zu wählen; den Faktor  $(s-1)!$  erhält man für  $Y$ .

Für die Zuordnung der Mengen  $Z_1, Z_3, Z_4$  erhalten wir  $(a_0 - (b + (s-1)) - 1)! \cdot (b - c - 1)! \cdot (c - 1)!$  Möglichkeiten.

Es verbleiben noch  $(n - a_0)!$  Möglichkeiten die restlichen Ecken zu nummerieren.

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} &\binom{n}{a_0} \cdot \binom{a_0-1}{b+(s-1)} \cdot \binom{b}{b} \cdot \binom{b-1}{c} \cdot (s-1)! \\ &\quad \cdot (a_0 - (b + (s-1)) - 1)! \cdot (b - c - 1)! \cdot (c - 1)! \cdot (n - a_0)! \\ &= \frac{n! \cdot (s-1)! \cdot (b-1)!}{a_0 \cdot c \cdot (b+s-1)!}. \end{aligned}$$

Bildet man die Summe über alle  $u, W$  und  $w_1 \in W$ , erhält man die behauptete Schranke.

Es verbleibt der Nachweis, dass  $v$  in  $J_\phi$  liegt und dass wir Mehrfachzählungen ausschließen können. Aufgrund der Wahl von  $\phi(w_1)$  ist  $N_G(w_1) \cap L_\phi(w_1) = \emptyset$  und somit  $w_1 \in J_\phi$ . Nach [Lemma 3.1.1, \(3.3\)](#) ist damit  $u \notin J_\phi$ . Wegen der Wahl von  $\phi(v)$  und  $C = N_G[v] \setminus \{u\}$  gilt  $N_G(v) \cap L_\phi(v) \cap J_\phi = \{u\} \cap J_\phi = \emptyset$  und wiederum mit [Lemma 3.1.1, \(3.3\)](#) folgt, dass  $v \in J_\phi$  ist.

Da außerdem  $N_G(v) \cap L_\phi(v) = \{u\}$ ,  $N_G(u) \cap L_\phi(u) = W$  und  $w_1 \in W$  mit kleinster Nummer ist, wäre  $\phi$  verschieden für eine andere Wahl von  $u$ ,  $W$  oder  $w_1$ . Mehrfachzählungen sind damit ausgeschlossen. ■

### 5.3 Vollständige $v$ -Graphen

In diesem Kapitel erneuerten wir die Anforderungen an Nachbarn der Mengen  $N_{q,H}(v)$ . Dies wurde einmal für  $q = 1$  und einmal für  $q = 2$  untersucht. Im Folgenden werden diese neuen Anforderungen für alle  $q = 1, \dots, p(H)$  erweitert, was zu einer allgemeineren Formel, die im Folgenden betrachtet werden soll, führt.

Dazu definieren wir die vollständigen  $v$ -Graphen:

#### Definition 4

Zu  $v \in V(G)$  sei  $H$  ein vollständiger  $v$ -Graph, falls  $H$  ein  $v$ -Graph nach [Definition 1](#) ist und sich zwischen den Mengen  $N_{q,H}(v)$  und  $N_{q+1,H}(v)$  für  $q = 0, \dots, p(H) - 1$  alle möglichen Kanten befinden.

Mit  $\mathcal{H}_{\text{komplett}}(v)$  bezeichnen wir die Menge aller vollständigen  $v$ -Graphen zu  $v \in V(G)$ .

Mit der Definition der vollständiger  $v$ -Graphen können wir [Proposition 5.3.1](#) allgemein formulieren. Wir zählen dabei alle Nummerierungen  $\phi \in S(G)$ , bei denen gilt:

- Für die Mengen  $N_{q,H}(v)$  mit ungeradem  $q$  reicht es zu fordern, dass  $\bigcap_{w \in N_{q,H}(v)} N_G(w) \subseteq R_\phi(w)$  für alle  $w \in N_{q,H}(v)$  ist.
- Für die Mengen  $N_{q,H}(v)$  mit geradem  $q$  reicht es zu fordern, dass es ein  $w \in N_{q,H}(v)$  gibt, so dass  $N_G(w) \cap L_\phi(w) \subseteq N_{q+1,H}(v)$  gilt.

Die Propositionen [5.1.2](#) und [5.2.2](#) erfüllen genau diese beiden Bedingungen; die betrachteten  $v$ -Graphen sind vollständig gemäß [Definition 4](#).

#### Proposition 5.3.1

Zu  $v \in V(G)$  sei ein vollständiger  $v$ -Graph  $H$  mit den Mengen  $N_{q,H}(v)$  für  $q = 0, \dots, p(H)$  gegeben. Hieraus wählen wir ein  $w^q \in N_{q,H}(v)$  für alle geraden  $q = 2, \dots, p(H)$ . Des Weiteren sei  $n_q := |N_{q,H}(v)|$  für alle  $q = 0, \dots, p(H)$ .

Wir definieren die Zahlen

$$\begin{aligned}
 a_p &:= \left| \bigcup_{q=2,4,\dots,p(H)} \left( N_G(w^q) \cup N_{q,H}(v) \cup N_{q-1,H}(v) \cup \bigcap_{u \in N_{q-1,H}(v)} N_G(u) \right) \cup N_G[v] \right|, \\
 b_p &:= \left| \bigcap_{u \in N_{p-1,H}(v)} N_G(u) \setminus N_{p,H}(v) \cup \bigcup_{q=2,4,\dots,p(H)-2} \left( N_G(w^q) \cup N_{q,H}(v) \cup N_{q-1,H}(v) \cup \bigcap_{u \in N_{q-1,H}(v)} N_G(u) \right) \cup N_G[v] \right|, \\
 a_{p-2} &:= \left| \bigcup_{q=2,4,\dots,p(H)-2} \left( N_G(w^q) \cup N_{q,H}(v) \cup N_{q-1,H}(v) \cup \bigcap_{u \in N_{q-1,H}(v)} N_G(u) \right) \setminus N_{p-1,H}(v) \cup N_G[v] \right|,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{p-2} &:= \left| \bigcap_{u \in N_{p-3,H}(v)} N_G(u) \setminus N_{p-2,H}(v) \cup \bigcup_{q=2,4,\dots,p(H)-4} \left( N_G(w^q) \cup N_{q,H}(v) \cup N_{q-1,H}(v) \cup \bigcap_{u \in N_{q-1,H}(v)} N_G(u) \right) \cup N_G[v] \right|, \\
&\vdots \\
a_2 &:= \left| \left( N_G(w^2) \cup N_{2,H}(v) \cup N_{1,H}(v) \cup \bigcap_{u \in N_{1,H}(v)} N_G(u) \right) \setminus N_{3,H}(v) \cup N_G[v] \right|, \\
b_2 &:= \left| \bigcap_{u \in N_{1,H}(v)} N_G(u) \setminus N_{2,H}(v) \cup N_G[v] \right|, \\
a_0 &:= \left| N_G[v] \setminus N_{1,H}(v) \right|.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\alpha(G) &\geq \sum_{v \in V(G)} \sum_{H \in \mathcal{H}_{\text{komplett}}(v)} \sum_{\substack{w^p \in N_{p,H}(v), \\ w^{p-2} \in N_{p-2,H}(v), \\ \vdots \\ w^2 \in N_{2,H}(v)}} \\
&\quad \frac{(n_p - 1)! \cdot n_{p-1}!}{a_p \cdot \prod_{i=1-n_{p-1}}^{n_p-1} (b_p + i)} \cdot \frac{(n_{p-2} - 1)! \cdot n_{p-3}!}{a_{p-2} \cdot \prod_{i=1-n_{p-3}}^{n_{p-2}-1} (b_{p-2} + i)} \cdot \dots \cdot \frac{(n_2 - 1)! \cdot n_1!}{a_2 \cdot \prod_{i=1-n_1}^{n_2-1} (b_2 + i)} \cdot \frac{1}{a_0}.
\end{aligned}$$

Der Beweis verläuft analog zu den beiden Beweisen in den vorangegangenen zwei Abschnitten.

In Kapitel 5 zeigte sich, dass durch eine Einschränkung der Menge  $\mathcal{H}(v)$  der  $v$ -Graphen zu  $\mathcal{H}_{\text{komplett}}(v)$  die Nenner verkleinert werden können (Proposition 5.3.1). Somit werden die Summanden größer und, sofern wir durch die Einschränkung nicht zu viele  $v$ -Graphen verlieren, die Schranke besser. Auf eine genauere Untersuchung, für welche Graphenklassen tatsächlich eine Verbesserung vorliegt, soll hier verzichtet werden. Des Weiteren sei angemerkt, dass es durchaus auch andere Ideen gibt, wie mit der Einschränkung der Menge  $\mathcal{H}(v)$  die Summanden ausreichend vergrößert werden können.

# 6 Über die Vermutung von E. Bertram und P. Horak

Wie in Abschnitt 2.4 betrachten wir in diesem Kapitel erneut die Menge  $\mathcal{P}_2(v) \subseteq \mathcal{H}(v)$  der Wege  $P = (v, u, w)$  der Länge 2, die  $v$  als Ecke haben. Dann ist  $M = \bigcup_{v \in V(G)} \mathcal{P}_2(v)$  die Menge aller induzierter Wege in  $G$  mit 3 Ecken. Wir zerlegen diese Wegemenge

$$M = \bigcup_{u \in V(G)} \mathcal{M}(u)$$

neu, indem wir jeder Ecke  $u \in V(G)$  die Menge  $\mathcal{M}(u)$  aller induzierter Wege in  $G$  mit 3 Ecken, deren „Mittelecke“  $u$  ist, zuordnen. Damit ergibt sich eine eindeutige Zuordnung eines solchen Weges  $P = (v, u, w)$  zu der fehlenden Kante  $vw$  in der Nachbarschaft von  $u$ . Nutzen wir dieses Vorgehen und die Eigenschaft, dass  $P = (v, u, w) \in \mathcal{P}_2(v) \cap \mathcal{P}_2(w)$  für jedes  $P = (v, u, w) \in \mathcal{M}(u)$  gilt, so können wir mit Hilfe des Satz von Turán Aussagen über die fehlenden Kanten in der Nachbarschaft von  $u$  treffen. Es wird sich hierbei der Parameter  $\omega_G(u)$  ergeben, so dass neue Schranken für  $\alpha(G)$  entwickelt werden können, was zu einer „Annäherung“ an die Vermutung 1.1.3 von E. Bertram und P. Horak [BH96] führen wird.

Wir formulieren erneut die Vermutung 1.1.3. Mit  $\omega_G(v)$  sei wiederum die Anzahl der Ecken der größten Clique bezeichnet, die  $v$  enthält.

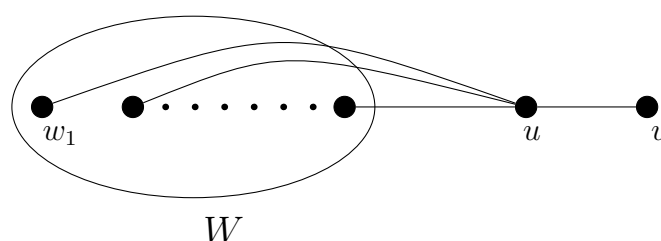
Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann gilt

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{2}{d_G(v) + \omega_G(v) + 1}.$$

Für perfekte Graphen und Graphen mit Maximalgrad 4 konnte dies bereits bewiesen werden [Bra+15], im Allgemeinen ist sie noch offen. Ein Beweis der Vermutung wird hier nicht angegeben werden können, da wir hierzu aus einer Schranke der dritten Kategorie eine Schranke der ersten Kategorie ableiten wollen. Hierbei ist eine Vielzahl von groben Abschätzungen notwendig, so dass diese abgeleitete Schranke letztendlich oft schlechter als die Vermutung sein wird.

## 6.1 Der Nicht-Kanten-Graph

Erinnern wir uns an die Situation aus Abschnitt 5.2.



Ausgehend von  $u$  betrachtet besteht dieser Graph nur aus Ecken aus der Nachbarschaft von  $u$ . Da die  $v$ -Graphen induzierte Untergraphen sind, existieren keine Kanten zwischen  $v$  und den Ecken aus  $W$ . Wir interessieren uns daher für die nicht-existierenden Kanten in der Nachbarschaft von  $u$ . Dazu sei folgende Definition gegeben.

**Definition 5**

Sei  $G = (V, E)$  ein beliebiger Graph und  $C \subseteq V(G)$  eine Menge an Ecken. Dann ist der Nicht-Kanten-Graph  $NE(C)$  der Graph mit

$$\begin{aligned} V(NE(C)) &:= C, \\ E(NE(C)) &:= \{uv \mid u, v \in C \text{ und } uv \notin E(G)\}. \end{aligned}$$

Es sei angemerkt, dass der Graph  $NE(C)$  der Komplementärgraph von  $G[C]$  ist.

Wir betrachten im Folgenden zu der Ecke  $u \in V(G)$  den Nicht-Kanten-Graphen der Nachbarschaft von  $u$ , das ist der Graph  $H := NE(N_G(u))$ . In diesem Graphen möchten wir die Anzahl der Kanten unter Zuhilfenahme des Satzes von Turán [Tur41] abschätzen.

**Proposition 6.1.1 (Satz von Turán)**

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $n$  Ecken, der keine  $(r + 1)$ -Clique enthält. Dann gilt

$$|E(G)| \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Zusätzlich ist der Graph  $K_{n_1, \dots, n_r}$  mit  $|n_i - n_j| \leq 1$  der einzige Graph ohne  $(r + 1)$ -Clique mit maximaler Anzahl an Kanten.

Der Komplementärgraph des Nicht-Kanten-Graphen  $H$  ist der induzierte Untergraph  $G[N_G(u)]$ . Dieser besitzt keine  $\omega_G(u)$ -Clique; hieraus folgt somit für  $H$  mit  $n := |V(H)| = d_G(u)$

$$|E(H)| = \binom{n}{2} - |E(G[N(u)])| \geq \frac{n^2}{2} - \left(1 - \frac{1}{\omega_G(u) - 1}\right) \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{2(\omega_G(u) - 1)} - \frac{n}{2}.$$

Bei Proposition 5.2.2 vertauschen wir die Summationsreihenfolge, das heißt es werden nicht mehr die Wege  $P = (v, u, w)$  von  $v$  ausgehend über  $u$  in die Menge  $W$  untersucht, sondern wir beginnen die Betrachtungen in  $u$ . Dann ist  $v$  ein Nachbar von  $u$  und die Menge  $W$  lässt sich mit dem Nicht-Kanten-Graphen  $H$  der Nachbarschaft beschreiben, dessen Kantenzahl wir im Folgenden dann auch abschätzen wollen. Das bedeutet

$$\begin{aligned} \alpha(G) &\geq CW(G) + \sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in N_G(v)} \sum_{\substack{W \subseteq N_G(u), \\ W \cap N_G(v) = \emptyset, \\ W \neq \emptyset}} \sum_{w_1 \in W} \frac{(s-1)!}{a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{s-1} \cdot b \cdot c} \\ &= CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in N_G(u)} \sum_{\substack{W \subseteq N_{NE(N(u))}(v), \\ W \neq \emptyset}} \sum_{w_1 \in W} \frac{(s-1)!}{a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{s-1} \cdot b \cdot c} \end{aligned} \quad (6.1)$$

mit  $s := |W|$ ,  $a_0 := |N_G[\{w_1, u, v\}]|$ ,  $a_i := |N_G[\{u, v\}] \setminus W| + (s - i)$  für  $i = 1, \dots, s - 1$ ,  $b := |N_G[\{u, v\}] \setminus W|$  und  $c := d_G(v)$ .



Wir möchten nun die Faktoren  $a_i$  für  $i = 0, \dots, s-1$  und  $b$  abschätzen. Eine Möglichkeit hierfür sind die lokal  $k$ -semiregulären Graphen, die im nächsten Abschnitt beschrieben werden.

## 6.2 Lokal $k$ -semireguläre Graphen

Für die Berechnung von (6.1) ist es notwendig, Informationen über die Grade  $d_G(w_1)$ ,  $d_G(u)$  und  $d_G(v)$  zu kennen. Wir betrachten daher in diesem Abschnitt eine Graphenklasse, in der die Grade benachbarter Ecken kaum voneinander abweichen. Beginnen wir mit der Definition dieser Graphenklasse:

### Definition 6

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $k \geq 0$  eine natürliche Zahl. Wir nennen  $G$  lokal  $k$ -semiregulär, falls für je zwei benachbarte Ecken  $u, v \in V(G)$  gilt

$$|d_G(u) - d_G(v)| \leq k.$$

Beachte, ein lokal 0-semiregulärer und zusammenhängender Graph ist ein regulärer Graph. Ein Graph mit Maximalgrad  $\Delta$  ist  $(\Delta - 1)$ -semiregulär.

Mit der Erklärung der lokal  $k$ -semiregulären Graphen können wir die Grade der Ecken aus der Nachbarschaft von  $u$  mit  $d_G(u)$  und  $k$  abschätzen. Für die Faktoren  $a_i$  für  $i = 0, \dots, s-1$  und  $b$  und  $c$  aus Formel (6.1) ergeben sich mit  $s = |W|$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= |N_G[\{w_1, u, v\}]| && \leq d_G(w_1) + d_G(u) + d_G(v) - 1 \leq 3d_G(u) + 2k - 1, \\ a_i &= |N_G[\{u, v\}] \setminus W| + i && \leq d_G(u) + (d_G(v) - s) + i \leq 2d_G(u) + k - s + i, \\ b &= |N_G[\{u, v\}] \setminus W| && \leq d_G(u) + (d_G(v) - s) \leq 2d_G(u) + k - s, \\ c &= d_G(v) && \leq d_G(u) + k. \end{aligned}$$

Diese Ungleichungen legen eine Definition von  $m_1(u)$ ,  $m_2(u)$  und  $m_3(u)$  nahe:

$$\begin{aligned} m_1(u) &:= 3d_G(u) + 2k - 1 \geq a_0, \\ m_2(u) &:= 2d_G(u) + k \geq b + s, \\ m_3(u) &:= d_G(u) + k \geq c. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha(G) &\stackrel{(6.1)}{\geq} CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in N_G(u)} \sum_{\substack{W \subseteq N_{NE(N(u))}(v), \\ W \neq \emptyset}} \sum_{w_1 \in W} \frac{(s-1)!}{a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{s-1} \cdot b \cdot c} \\ &\geq CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in N_G(u)} \sum_{s=1}^{p:=d_{NE(N(u))}(v)} \binom{p}{s} s \cdot \frac{(s-1)!}{m_1(u) \cdot (m_2(u)-s) \cdot \dots \cdot (m_2(u)-1) \cdot m_3(u)} \\ &= CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{m_1(u) \cdot m_3(u)} \sum_{v \in N_G(u)} p! \sum_{s=1}^p \frac{(m_2(u) - s - 1)!}{(p-s)! \cdot (m_2(u) - 1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{m_1(u) \cdot m_3(u)} \sum_{v \in N_G(u)} p! \frac{(m_2(u) - p - 1)!}{(m_2(u) - 1)!} \sum_{s=1}^p \binom{m_2(u) - s - 1}{p - s} \\
&\stackrel{q:=p-s}{=} CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{m_1(u) \cdot m_3(u)} \sum_{v \in N_G(u)} p! \frac{(m_2(u) - p - 1)!}{(m_2(u) - 1)!} \sum_{q=0}^{p-1} \binom{m_2(u) + (q - p) - 1}{q} \\
&= CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{m_1(u) \cdot m_3(u)} \sum_{v \in N_G(u)} p! \frac{(m_2(u) - p - 1)!}{(m_2(u) - 1)!} \binom{m_2(u) - 1}{p - 1} \\
&= CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{m_1(u) \cdot m_3(u)} \sum_{v \in N_G(u)} p! \frac{1}{(m_2(u) - p)(p - 1)!} \\
&= CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{m_1(u) \cdot m_3(u)} \sum_{\substack{v \in N_G(u), \\ p:=d_{NE(N(u))}(v)}} \frac{p}{(m_2(u) - p)}.
\end{aligned}$$

Wenden wir die Jensen'sche Ungleichung ([Lemma 1.2.1](#)) mit der konvexen Funktion  $x \mapsto \frac{x}{m_2(u) - x}$  für  $0 \leq x < m_2(u)$  auf die zweite Summe der letzte Zeile an.

$$\begin{aligned}
\alpha(G) &\geq CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{m_1(u) \cdot m_3(u)} \cdot d_G(u) \sum_{v \in N_G(u)} \frac{1}{d_G(u)} \frac{d_{NE(N(u))}(v)}{(m_2(u) - d_{NE(N(u))}(v))} \\
&\stackrel{(J)}{\geq} CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{m_1(u) \cdot m_3(u)} \cdot d_G(u) \frac{\sum_{v \in N_G(u)} \frac{1}{d_G(u)} d_{NE(N(u))}(v)}{m_2(u) - \sum_{v \in N_G(u)} \frac{1}{d_G(u)} d_{NE(N(u))}(v)} \\
&= CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{m_1(u) \cdot m_3(u)} \frac{d_G(u) \cdot 2 |E(NE(N(u)))|}{(d_G(u) \cdot m_2(u) - 2 |E(NE(N(u)))|)} \\
&\geq CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{m_1(u) \cdot m_3(u)} \frac{\frac{(d_G(u))^3}{(\omega_G(u) - 1)} - (d_G(u))^2}{\left(d_G(u) \cdot m_2(u) - \left(\frac{(d_G(u))^2}{(\omega_G(u) - 1)} - d_G(u)\right)\right)} \\
&= CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{m_1(u) \cdot m_3(u)} \frac{(d_G(u))^2 - d_G(u)(\omega_G(u) - 1)}{\left((m_2(u) + 1)(\omega_G(u) - 1) - d_G(u)\right)}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten eine Schranke, in die (neben dem festen Wert  $k$ ) nur  $d_G(u)$  und  $\omega_G(u)$  eingehen, so wie es auch in der [Vermutung 1.1.3](#) der Fall ist.

### Proposition 6.2.1

Es sei  $k = 0, 1, \dots$  beliebig und  $G = (V, E)$  ein lokal  $k$ -semiregulärer Graph. Dann gilt

$$\alpha(G) \geq \sum_{u \in V(G)} \mu(u)$$

mit

$$\begin{aligned}
\mu(u) &:= \frac{1}{d_G(u) + 1} \\
&\quad + \frac{d_G(u)(d_G(u) - \omega_G(u) + 1)}{(3d_G(u) + 2k - 1)(d_G(u) + k) \left( (2d_G(u) + k + 1)(\omega_G(u) - 1) - d_G(u) \right)}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Es ist uns nicht möglich eine Graphenklasse anzugeben, für die diese Schranke die Vermutung von E. Bertram und P. Horak bestätigt. Daher bezeichnen wir [Proposition 6.2.1](#) nur als „Annäherung“ an die Vermutung.

Wir möchten als Abschluss zu diesem Abschnitt diese Annäherung illustrieren und stellen hierbei fest, dass für alle nicht-isolierten Ecken  $u \in V(G)$  gilt

$$2 \leq \omega_G(u) \leq d_G(u) + 1.$$

Betrachten wir die Extremalwerte für  $\omega_G(u)$ . Wird der maximale Wert  $\omega_G(u) = d_G(u) + 1$  für alle Ecken  $u \in V(G)$  angenommen, so ist  $G$  ein Graph bestehend aus unabhängigen Cliques. Sowohl  $\mu(v)$  aus [\(6.2\)](#) als auch die Summanden von [Vermutung 1.1.3](#) reduzieren sich zu  $\frac{1}{d_G(v)+1}$ , denn schließlich ist  $\alpha(G) = CW(G)$ . Im zweiten Fall  $\omega_G(u) = 2$  für alle  $u \in V(G)$  existieren im Graphen  $G$  keine Dreiecke, woraus das [Korollar 6.2.2](#) folgt. Es sei noch angemerkt, dass es für 3-kreis-freie Graphen bereits sehr gute untere Schranken [[She91](#)] gibt:

### Korollar 6.2.2

*Es sei  $k = 0, 1, \dots$  beliebig und  $G = (V, E)$  ein lokal  $k$ -semiregulärer und 3-kreis-freier Graph. Dann gilt*

$$\alpha(G) \geq CW(G) + \sum_{u \in V(G)} \frac{d_G(u)(d_G(u) - 1)}{(3d_G(u) + 2k - 1)(d_G(u) + k)(d_G(u) + k + 1)}.$$

Wir nehmen zusätzlich noch an, dass  $G$  auch regulär ist, obwohl es für reguläre Graphen ebenfalls sehr gute Resultate in der Literatur gibt, beispielsweise sei hier [[Bro41](#)] genannt. Das heißt wir betrachten kurz den Fall  $k = 0$  und erhalten für einen 3-kreis-freien, regulären Graphen  $G$  vom Grad  $r$ :

$$\frac{\alpha(G)}{n} \geq \frac{1}{r+1} + \frac{r-1}{(3r-1)(r+1)} = \frac{4r-2}{3r^2+2r-1} \approx \frac{4}{3r}.$$

Für die Schranke von Brooks gilt

$$\frac{\alpha(G)}{n} \geq \frac{1}{\Delta(G)} = \frac{1}{r}$$

und die [Vermutung 1.1.3](#) von E. Bertram und P. Horak ergibt

$$\frac{\alpha(G)}{n} \geq \frac{2}{r+3}.$$

Somit ist diese Schranke für reguläre, 3-kreis-freie Graphen im Allgemeinen besser als das Resultat von Brooks. Für einen Kreis mit gerader Anzahl Ecken ( $r = 2$ ) erhalten wir hingegen

$$\frac{4r-2}{3r^2+2r-1} = \frac{2}{r+3} = \frac{2}{5}.$$

Abschließend für dieses Kapitel stellen wir fest, dass unsere „Annäherung“ ein Beitrag zur Vermutung von E. Bertram und P. Horak in dem Sinne ist, dass wir ein schwächeres Resultat

beweisen können, welches (bei festem  $k$ ) die gleichen Graphenparameter enthält. Nur in wenigen Fällen, wie eben bei Kreisen gesehen – und Kreise haben einen Maximalgrad kleiner als 4, das heißt sie werden schon durch [Bra+15] abgedeckt – kann durch dieses Ergebnis obige Vermutung bestätigt werden.

## 7 Zusammenfassung

Ausgehend von der im Allgemeinen „schweren Berechenbarkeit“ der Unabhängigkeitszahl  $\alpha(G)$  ist es gerechtfertigt, sie mit unteren Schranken abzuschätzen. Die vielen Vorschläge für untere Schranken in der Literatur zeigen, wie intensiv diese Thematik in den vergangenen 35 Jahren untersucht wurde. Da wir den Schwerpunkt dieser Arbeit auf „Caro-Wei-ähnliche“ Schranken gelegt haben, ist auch die in [Theorem 1](#) formulierte, neue, allgemeine untere Schranke für die Unabhängigkeitszahl eine dieser Art. Die oft aufwändige Berechnung, die der Leser bereits am Beispiel eines Kreises nachvollziehen konnte, motivierte uns, einfachere und leicht berechenbare Schranken abzuleiten. Hierzu wurden die Mengen  $\mathcal{H}(v)$  der sogenannten  $v$ -Graphen zu den Ecken  $v \in V(G)$  eingeschränkt. Teilweise war es so möglich, die in unserer Schranke vorkommenden Summanden weiter zu vergrößern, wie [Kapitel 5](#) ausführt. Neben der Anwendung der neuen Schranke als Mittel zur Abschätzung der Unabhängigkeitszahl – verschiedene Vergleiche bestätigten hierbei die guten Ergebnisse der Schranken – konnten die Resultate auch genutzt werden, um eine Schranke für lokal  $k$ -semireguläre Graphen zu entwickeln. Ähnlich wie bei der Vermutung von E. Bertram und P. Horak gehen hierzu für festes  $k$  nur die Größen  $d_G(v)$  und  $\omega_G(v)$  ein. Die erwähnte Vermutung ließ sich jedoch nicht mit den hier vorgestellten Mitteln, auch nicht teilweise, beweisen.

Um die algorithmische Strategie im Beweis der neuen Schranke einschätzen zu können, suchten wir nach vergleichbaren Resultaten in der Literatur, die ebenfalls dieses algorithmische Vorgehen für den Beweis nutzen. Hierbei stießen wir auf die Schranke von S. M. Selkow, der wir uns in [Kapitel 4](#) zuwendeten. Wir konnten zeigen, dass der Beweis in der Originalarbeit von S. M. Selkow falsch ist. Dort wird eine Abschätzung benutzt, die, wie in [Lemma 4.1.2](#) gezeigt, beliebig falsch werden kann. Selbst nach intensiven Literaturstudien bleibt offen, ob dieser Fehler in der Arbeit von S. M. Selkow bereits entdeckt wurde, oder ob es mittlerweile einen Beweis gibt. Andererseits ist es uns auch nicht gelungen, ein Gegenbeispiel zu konstruieren. Es bleibt folglich die Frage offen, wie das Resultat von S. M. Selkow oder eine stärkere Variante bewiesen werden kann.

# Literatur

- [ACL13] Eric Angel, Romain Campigotto und Christian Laforest. “A new lower bound on the independence number of graphs”. In: *Discrete Applied Mathematics* 161.6 (2013), S. 847–852 (siehe S. [4](#), [25](#), [27](#)).
- [AS04] Noga Alon und Joel H Spencer. *The probabilistic method*. John Wiley & Sons, 2004 (siehe S. [34](#)).
- [BAT11] William Brendel, Mohamed Amer und Sinisa Todorovic. “Multiobject tracking as maximum weight independent set”. In: *2011 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. IEEE. 2011, S. 1273–1280 (siehe S. [1](#)).
- [BH96] E Bertram und P Horak. “Lower bounds on the independence number”. In: *Combinatorics* (1996), S. 93–98 (siehe S. [3](#), [51](#)).
- [Bra+15] C Brause u. a. “A lower bound on the independence number of a graph in terms of degrees and local clique sizes”. In: *Discrete Applied Mathematics* (2015) (siehe S. [3](#), [51](#), [56](#)).
- [Bro41] Rowland Leonard Brooks. “On colouring the nodes of a network”. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Bd. 37. 02. Cambridge Univ Press. 1941, S. 194–197 (siehe S. [2](#), [55](#)).
- [BW06] Sergiy Butenko und Wilbert E Wilhelm. “Clique-detection models in computational biochemistry and genomics”. In: *European Journal of Operational Research* 173.1 (2006), S. 1–17 (siehe S. [1](#)).
- [Car79] Yair Caro. *New results on the independence number*. Techn. Ber. Technical Report, Tel-Aviv University, 1979 (siehe S. [2](#)).
- [Die96] Reinhard Diestel. *Graphentheorie*. Bd. 2. Springer Berlin, Heidelberg, New York, 1996 (siehe S. [6](#)).
- [EH00] Lars Engebretsen und Jonas Holmerin. “Clique is hard to approximate within  $n^{-1-o(1)}$ ”. In: *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*. Springer. 2000, S. 2–12 (siehe S. [1](#)).
- [GJ79] Michael R Garey und David S Johnson. *Computers and intractability*. 1979 (siehe S. [1](#)).
- [Har11] Jochen Harant. “A lower bound on independence in terms of degrees”. In: *Discrete Applied Mathematics* 159.10 (2011), S. 966–970 (siehe S. [25](#)).
- [Has96] Johan Hastad. “Clique is hard to approximate within  $n^{-1-\epsilon}$ ”. In: *37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1996. Proceedings*. IEEE. 1996, S. 627–636 (siehe S. [1](#)).
- [HR11] Jochen Harant und Dieter Rautenbach. “Independence in connected graphs”. In: *Discrete Applied Mathematics* 159.1 (2011), S. 79–86 (siehe S. [5](#)).
- [Kar72] Richard M Karp. “Reducibility among combinatorial problems”. In: *Complexity of computer computations*. Springer, 1972, S. 85–103 (siehe S. [1](#)).

- [Kul16] Katja Kulse. “Caro-Wei-ähnliche untere Schranken für Unabhängigkeit in Graphen”. <http://opac.lbs-ilmenau.gbv.de/DB=1/XMLPRS=N/PPN?PPN=87091314X>. Magisterarb. Technische Universität Ilmenau, 2016 (siehe S. 21).
- [LG] Craig E Larson und Patrick Gaskill. *The Independence Number Project*. URL: <http://independencenumber.wordpress.com/> (siehe S. 1).
- [Mur91] Owen Murphy. “Lower bounds on the stability number of graphs computed in terms of degrees”. In: *Discrete Mathematics* 90.2 (1991), S. 207–211 (siehe S. 3).
- [Sel94] Stanley M Selkow. “A probabilistic lower bound on the independence number of graphs”. In: *Discrete Mathematics* 132.1 (1994), S. 363–365 (siehe S. 3, 35–37).
- [She91] James B Shearer. “A note on the independence number of triangle-free graphs, II”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 53.2 (1991), S. 300–307 (siehe S. 55).
- [Tur41] Paul Turán. “On an extremal problem in graph theory”. In: *Mat. Fiz. Lapok* 48.436-452 (1941), S. 137 (siehe S. 52).
- [Wei81] VK Wei. *A lower bound on the stability number of a simple graph*. Techn. Ber. Bell Laboratories Technical Memorandum 81-11217-9, Murray Hill, NJ, 1981 (siehe S. 2, 5).
- [Wil67] Herbert S Wilf. “The eigenvalues of a graph and its chromatic number”. In: *J. London Math. Soc* 42.1967 (1967), S. 330 (siehe S. 2).